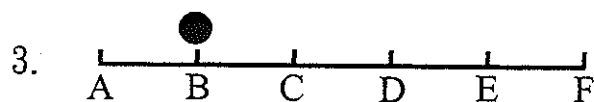


台北市立景美女高 104 年數學科教師甄選試卷

(共十二大題，每題 10 分，請在答案卷上標明題號，並詳列每題計算過程及證明，否則不予計分)

1. 在 $1+11+111+\cdots+\underbrace{111\dots111}_{2020\text{個數字}}$ 的和之中，數字 1 共出現了多少次？

2. 設 $A(3, 1, 2), B(3, -6, 2), C(1, 1, 1)$ ，在 A, B, C 三點所張出的平面上有一點 P ，滿足 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，且 P 點到直線 AB 的距離為 1，求 P 點的坐標 = ？



如上圖，棋子放在位置 B ，擲一顆公正骰子，若擲得點數 1 或 2，則棋子往左移動一格（至 A ），若擲得點數 3, 4, 5 或 6，則棋子往右移動一格（至 C ），然後重複以上（擲骰子並移動棋子）的操作。若是棋子走到 A ，或是走到 F ，則遊戲結束。問棋子由 B 走到 F 的機率為何？

4. 四位數字 $abcd$ 滿足 $\begin{cases} a > b \\ b < c \\ c > d \end{cases}$ ，如 7350、1061、9582，請問滿足上述條件的四位數共有幾個？

5. 已知 $2\log_3(a+3b) = \log_3(a-3) + \log_3(b+2) + \log_3 10$ ，若 a, b 為互質之正整數，求 $(a, b) = ?$

6. 設平面上有 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ ，若 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{CA}$ ， $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + 3\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{AB}$ ，則 $\triangle PQR$ 與 $\triangle ABC$ 之面積比為？

7. 下列各敘述中，正確者請證明之，不正確者請舉反例說明之：

(1) 已知一無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂？

(2) 設一函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = a$ (定值)，則必 $f(1) = 0$ ？

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ ，則必 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

8. 設 $n \in \mathbb{N}$ ， $n \leq 30$ ，則滿足 $(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \sin n\theta + i\cos n\theta$ 之所有 n 的總和為？

9. 設 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 均在 $y = x - \frac{1}{3}x^3$ 上，已知以 P, Q 為切點之切線互相平行，且兩直線相距 $\frac{8}{3}$ ，若 $x_1 < x_2$ 則 $x_1 = ?$ 又以 P 為切點之切線方程式為何？

10. 在拋物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ 上分別以 $(0, -3)$ 與 $(3, 0)$ 兩點為切線，試求此二切線與拋物線所圍成區域之面積為？

11. 設 x, y, z 為實數，已知 $x+y+z=0$ ， $x^2+y^2+z^2=6$ ，求：

(1) x 的範圍？

(2) $xy+yz+zx$ 之值？

(3) $x^3+y^3+z^3$ 之最大值及最小值？

12. 設函數 $y = f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$

(1) 求出 $y = f(x)$ 的漸近線方程式？

(2) 試討論 $y = f(x)$ 的圖形的遞增、遞減及凹向性的區間？

(3) 求出 $y = f(x)$ 的極大值、極小值點及反曲點？

(4) 依據(1)~(3)的結果繪出 $y = f(x)$ 的圖形？