國立鳳山高級中學104年教師甄選　數學科試題

本試題共分二部分，請於答案卷上標示題號作答，並將試題卷與答案卷一併繳回，違者不予計分。

第一部份：填充題：80分(每題5分)僅須書寫答案，不必計算過程

1. 設 $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$，則 $\log_{16}(x^3-6x+2)=$______

2. 坐標平面上，不等式 $|x|+|y|+|x+y|\le 2$ 所圍成之區域面積為______

3. 設 A，B，C 依序為一筆直公路上之相異三點，$\overline{AB}=\overline{BC}=1$ 公里，從此三點觀測塔 P，在 A 處測得塔在其東北方向，在 B 處測得塔在其正東方向，在 C 處測得塔在其南偏東 60° 方向，則塔 P 與此筆直公路之最短距離為______公里

4. 設 n 為正整數，$[x]$ 表不大於 x 之最大整數，$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{n}]=3n$，則 $n=$______

5. 曲線 $y^2=4-2x$ 與直線 $2x+y=2$ 所圍成之區域面積為______

6. 已知有95個數字 a_1，a_2，⋯，a_{95}，每個數字只能取值 $+1$ 或 -1 其中一個，則這些數字兩兩乘積之和的最小正值為______

7. 袋中有12個白球，8個紅球，每次隨機取出一球，取出後不放回，直到所有球取完為止，在取球的過程中，發生取出白球與紅球個數相等的事件為 A，則 $P(A)$=______

8. 在 ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，D、E 兩點在邊 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$，若 $\angle ACD=\alpha$，$\angle DCE=\beta$，$\angle ECB=\gamma$，則 $\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}$=______

9. 設 $P(x,y)$ 為雙曲線 $9x^2-16y^2=144$ 上一點，且 P 點在第一象限內，則 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x|3x-4y|}$=______

10. 已知直線 $y=2x+k$ 與 $y=x^3-x+1$ 的圖形交於相異三點，且至少有一交點的的 x 坐標大於 $\dfrac{3}{2}$，則實數 k 之範圍為______

11. 設 a 為實數，已知滿足方程式 $\left|\,\left||x-1|-2\right|+a\,\right|=x^2-2x+2$ 的相異實數 x 共有3個，則 a＝______

12. 使得 $20n^2+9n+1$ 為完全平方數(即某個整數的平方)的最小正整數 n＝______

13. 若三次方程式 $x^3-x^2+2x-3=0$ 的三個根分別為 a、b、c，則

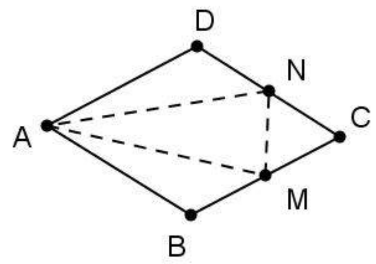
$$\frac{a^3}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{b^3}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{c^3}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=\underline{\qquad\qquad}$$

14. 已知拋物線 Γ 的焦點為 F，頂點為 V，$\overline{VF}=4$，P、Q 為 Γ 上二點，且 $\overline{PQ}$ 過 F，若 $\overline{PQ}=18$，則

$\left|\overline{PF}-\overline{QF}\right|=\underline{\qquad\qquad}$

15. 已知實數 x，y，a，b 滿足 $\begin{cases} ax+by=1 \\ ax^2+by^2=2 \\ ax^3+by^3=8 \\ ax^5+by^5=100 \end{cases}$，則 $ax^4+by^4=\underline{\qquad\qquad}$

16. 如圖之菱形 $ABCD$，已知 $\angle B=120^\circ$，M 為 $\overline{BC}$ 中點，N 為 $\overline{CD}$ 中點，分別以虛線 $\overline{AN}$、$\overline{AM}$、$\overline{MN}$ 為折線，將 ΔADN、ΔABM、ΔCMN 往上折，使 B，C，D 折至同一點 P，形成一個四面體 $PAMN$，設平面 PAN 與平面 PAM 之銳夾角為 θ，則 $\cos\theta=\underline{\qquad\qquad}$



第二部份：計算證明題：20分(每題10分)必須有詳細之證明過程，否則不予計分

1. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為三次實係數多項式，試證明：

（1）$y=f(x)$ 之圖形必有反曲點

（2）$y=f(x)$ 之圖形以反曲點為對稱中心

2. 試證明：對任意正實數 x，y，z，不等式 $x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2\ge x^2y^2z+y^2z^2x+z^2x^2y$ 恆成立