國立彰化高級中學 104 學年度第一次教師甄選 數學科試題

說明：(A)測驗時間：120 分鐘

(B)第 1 題到第 13 題，每題 7 分；第 14 題 9 分；滿分 100 分。

答案卷上請標題號，需計算過程(或想法)，否則，不予計分。

1. $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}$之值＝ ？

2. 若 $n \geq 3$，$n \in N$，試證：$n^{n+1} > (n+1)^n$ 。

3. 若 $x \in \mathrm{N}$，且$\sqrt{1648+x^3}-\sqrt{4949-x^3}=75$，求 x ＝ ？

4. 求滿足$\sum_{k=1}^{n}\frac{5^k C_k^n}{k} \geq 6^{2015}$的最小正整數 n＝？

5. 已知 $f(x)=\int_x^{x^2}\sqrt[3]{-65+38t+t^4}\,dt$ 在$x=2$附近為可微，求 $f'(2)$之值。

6. 設數列$\{a_n\}$滿足$a_{k+2}=a_{k+1}-a_k$，$\forall \mathrm{k} \in \mathrm{N}$，而且前 2000 項和為 2014，前 2014 項和為 2000。試求前 2015 項之總和。

7. $\mathrm{A}=\{1,2,3,4,\cdots,\cdots,24,25\}$，$\mathrm{B}=\{\mathrm{x}|\mathrm{x} \in \mathrm{A}\}$，且 $|\mathrm{B}|=5$(元素個數)，若 $\mathrm{a},\mathrm{b} \in \mathrm{B}$，則 $|\mathrm{a}-\mathrm{b}| \geq 4$，求 B 的可能總數。

8. $x^3+3x-2=0$ 在 0 與 1 之間有一個實數解 x_0，試解 x_0。

9. 若 P 為直角坐標平面上一點，O 為原點，且 $A(2,0)$，$B(0,-2)$，$\overline{OP}=2$，

(1)求 $\overline{PA}^2 \times \overline{PB}^2$ 的最大值．

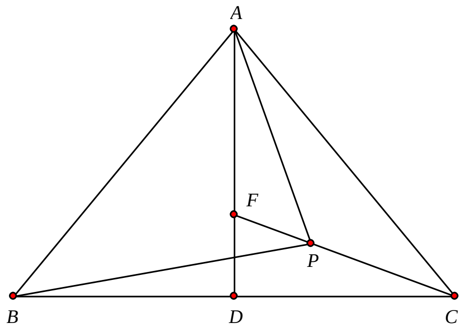
(2)若 P 點落在 x 軸上方，求 $\overline{PA}+3\sqrt{2}\,\overline{PB}$ 的最大值．

10. 設 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$，規定 $f_1(x)=f(f(x))$，$f_2(x)=f(f_1(x))$，$f_3(x)=f(f_2(x))$，…，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，$n=2$，3，4，…，求 $f_{2015}(104)$．

11. 三次曲線 $y=x^3+ax^2+x+1$，若由原點可作三條相異的切線，求 a 的範圍為？

12. 設△ABC 滿足 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 。若點 P 是△ABC 的內部一點，且 $\angle ACP=30^\circ$ 、 $\angle PCB=2\angle PBC$ 。

若直線 CP 與中線 $\overline{AD}$ 交於點 F，試證： $\overline{AP}$ 是△CAF 的一內角平分線。



13. 安排 n 個人進入 A, B, C 三間房間，A 房間必須有奇數個人，試問有幾種不同的安排方法？

14. 已知 x 為正實數，

(1)求證：函數 $f(x)=x^{\log 9}+19$ 為嚴格遞增函數。（4 分）

(2)求方程式$(9^{\log x}+19)^{\log 9}+19=x$ 的解。（5 分）