國立臺南第二高級中學104學年度第一次教師甄試數學科試題卷

一、填充題：每題5分，共17題85分。

1. A、B兩男士好奇地詢問C女士的年齡，C女士列出11個可能的答案：
   35、36、38
   42、45、46
   51、55、57
   61、62
   接著C女士將她年齡的十位數告訴A男士，將她年齡的個位數告訴B男士。
   A男士說：「我不知道C的年齡，但我想B也不知道。」
   B男士說：「我原本也不知道C的年齡，但現在知道了。」
   A男士說：「哦，那現在我也知道了。」
   請問C女士的年齡是 ______ 歲。

2. 在坐標平面上，點集合 $S=\{(x, y) \mid \log_{(x+y)}\sqrt{1-x^2} > \log_{(x+y)} y\}$ 之面積 = __________。

3. 設 $\theta \in R$，$f(\theta)=\dfrac{3-\sin\theta}{2+\cos\theta}$ 之最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M, m)=$ ________。

4. 以直線 $L:\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ 為軸，將點 $P(0,2,1)$旋轉一圈得一圓C，求圓C投影到xy平面所得的曲線方程式。______________________________。
   (必須以 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 之形式表示。)

5. 一圓形跑道上有S、A、B三地點，S是起點，A、B是障礙區，跑車在A、B處發生故障(完全靜止不動)的機率分別為 $\dfrac{1}{10}$、$\dfrac{1}{21}$。現在一輛跑車自S出發，經A再經B環繞跑道，未故障前可以一圈接一圈繼續跑，求此輛跑車環繞跑道圈數的期望值為 ________。

6. 於坐標平面上 $\Gamma:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ y\le x \\ y\ge x^2-1 \end{cases}$ 之圖形繞x軸旋轉一週，求所產生旋轉體之體積 = ____。

7. 實數 x，y 滿足 $x^2+2xy+2y^2=4$，則 xy 之最小值為______。

8. 若正實數a，使得方程式$x^3+(-a^2+2a+2)x-2a^2-2a=0$ 有三個整數根，

則 $a=$________(兩解)。

9. 在 1,2,3,4,5 的排列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5中，滿足條件 $a_1 < a_2$，$a_2 > a_3$，$a_3 < a_4$，$a_4 > a_5$

的排列的個數是 ________。

10. 多項式 $f(x)$ 滿足 $xf(x)=3x^4-x^2+4+\int_1^x f(t)dt$，則 $f(2)$ 為________。

11. $[x]$表示不大於 x 的最大整數，則方程$[x^2+x]=6x+98$ 的解為________(兩解)。

12. 設 a、b、c、x、y、$z\in R$，且 $a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$，

則 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ 的最大值為 ________。

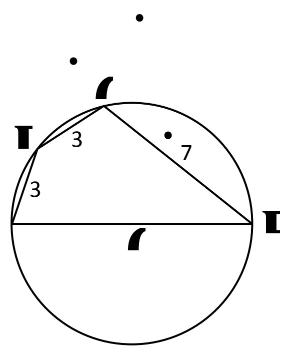
13. 設 P（n）表正整數 n 之所有正因數之積，例如：P（6）$=1\times2\times3\times6=36$。

若 P（n）$=2^{18}\times7^{12}$，則正整數 $n=$________。

14. 已知兩正數 p、q 滿足$\dfrac{1}{2p}+\dfrac{1}{3q}=9$，則 $2\log_{\frac{1}{6}}p+\log_{\frac{1}{6}}q$ 的最大值為________。

15. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，且$\overline{AB}$為此圓的直徑，

已知 $\overline{BC}=7$，$\overline{CD}=\overline{DA}=3$，則直徑$\overline{AB}$之長 =________。



16. 已知 $36^x-6^{x+1}+a=0$ 的兩根均為正數，則 a 的範圍為 ________。

17. 設△ABC的三邊長為 a、b、c，且 a、b、c 恰為方程式 $x^3-14x^2+62x-88=0$ 的三根，則

△ABC的面積為 ________。

二、計算題：每題 5 分，共 3 題 15 分。

1. 設 $E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$，$E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$，$E_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

為空間中的三平面，若 E_1，E_2，E_3 恰相交於一點，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$，試證之。

2.已知遞迴式 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + n^2$，試求出 a_n 的一般項。

3.如右圖，O 為半徑為 1 之半圓的圓心，A 為直徑 $\overline{PQ}$ 延長線上一點且 $\overline{OA} = 2$，B 為半圓上之任一點，以 $\overline{AB}$ 為一邊作正△ABC，試求四邊形 $OACB$ 面積的最大值。