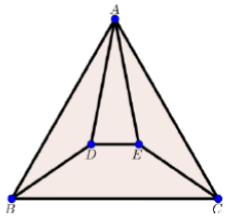
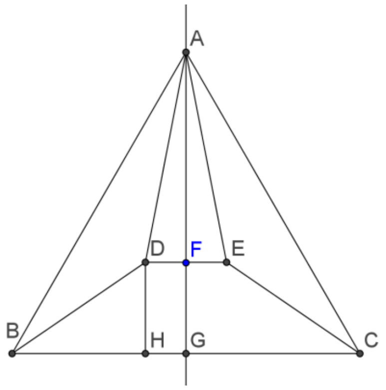
<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>如圖，正三角形 ABC 中，已知 $\overline{AD}=\overline{AE}=2\sqrt{7}$，$\overline{DE}=2$，$\overline{DB}=\overline{EC}=4$，則正三角形 ABC 的邊長為？


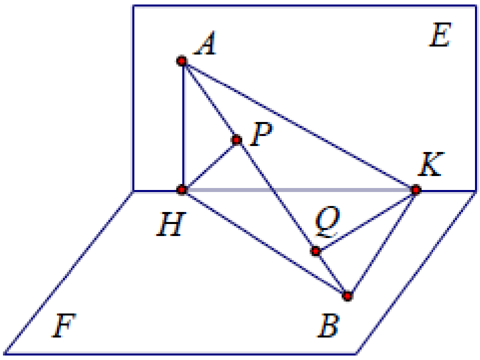
【解答】$5+\sqrt{13}$
【詳解】

過 A 點作三角形的高，分別交 $\overline{DE}$ 、 $\overline{BC}$ 於 F,G，設三角形 ABC 邊長為 A，則 $\overline{BG}=\frac{a}{2},\overline{AF}=\sqrt{2\sqrt{7}^2-1^2}=3\sqrt{3}$，
$\overline{FG}=\frac{\sqrt{3}a}{2}-3\sqrt{3}$。做一個以 $\overline{BD}$ 為斜邊的直角三角形，則有
$4^2=(\frac{a}{2}-1)^2+(\frac{\sqrt{3}a}{2}-3\sqrt{3})^2$，解得 $a^2-10a+12=0,a=\frac{10\pm\sqrt{52}}{2}$，取正根 $a=5+\sqrt{13}$。
【備註】不要用”正三角形內部一點”的方式旋轉來解題，轉不出來的。</td>
<td>104
建
國
中
學</td>
<td></td>
<td></td>
<td>A
0
0
3
4</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>設 a,b,c 均為複數且 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，則 $\frac{a+b+c}{a+b-c}$ 之值為 ？
【解答】0 或 3
【詳解】設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=t$，$t\in C$，則 $a=bt,b=ct,c=at$，可解得 $a=at^3$。
$t^3=1\Rightarrow(t-1)(t^2+t+1)=0$，可知 $t=1,\omega,\omega^2$。
代入 $\frac{a+b+c}{a+b-c}$，若 $t=1$，則 $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{3a}{a}=3$。
若 $t=\omega$，則 $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a+a\omega^2+a\omega}{a+a\omega^2-a\omega}=\frac{0}{a+a\omega^2-a\omega}=0$，同理，若 $t=\omega^2$，則
$\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a+a\omega+a\omega^2}{a+a\omega-a\omega^2}=\frac{0}{a+a\omega-a\omega^2}=0$，所以只有兩種值，0 或 3。</td>
<td>104
建
國
中
學</td>
<td></td>
<td></td>
<td>A
0
0
3
5</td>
</tr>
</table>

1	已知$\{a_n\}$ 為每一項皆為正整數的數列，其中$n=1,2,3,\ldots$，並且對所有的自然數而言，皆有$a_{n+3}=a_{n+2}(a_{n+1}+2a_n)$，若$a_6=2288$ ，試求數對$(a_1,a_2)=$？ 【解答】(5,1) 【詳解】$a_6=2288=2^4\times 11\times 13$。將$a_6$逐步換成$a_1,a_2,a_3$。 $a_4=a_3(a_2+2a_1)$；$a_5=a_4(a_3+2a_2)=a_3(a_2+2a_1)(a_3+2a_2)$； $a_6=a_5(a_4+2a_3)=a_3(a_2+2a_1)(a_3+2a_2)\left[a_3(a_2+2a_1)+2a_3\right]$ $=a_3^{\ 2}(a_3+2a_2)(a_2+2a_1)\left[a_2+2a_1+2\right]$ 比較觀察可知a_6 中有兩個因數相差 2，因此$(a_2+2a_1)\left[a_2+2a_1+2\right]=11\times 13$ 所以$a_3^{\ 2}(a_3+2a_2)=2^4$，因每一項皆為正整數，所以a_3只有可能為 2，可推得$a_2=1$， $a_1=5$。	104 建 國 中 學				A 0 0 3 6

1

已知平面 E 與平面 F 互相垂直且相交於直線 HK，點 A、B 分別在平面 E、F 上，使得 $\overline{AH}\perp\overline{HK}$，$\overline{BK}\perp\overline{HK}$，如圖所示。若 $\cos\angle BAK=\dfrac{2}{3},\cos\angle ABH=\dfrac{7}{9}$，令半平面 ABK 與半平面 ABH 所成兩面角之度量為 θ，則 $\cos\theta$ 之值為？



【解答】$\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

【詳解】不失一般性，設 $\overline{AB}=9$，利用畢氏定理求出每一段長度，其中 $\overline{HK}=2$，

$\overline{PH}=\dfrac{28\sqrt{2}}{9}$，$\overline{KQ}=2\sqrt{5}$，$\overline{PQ}=9-\overline{AP}-\overline{QB}=\dfrac{4}{9}$。

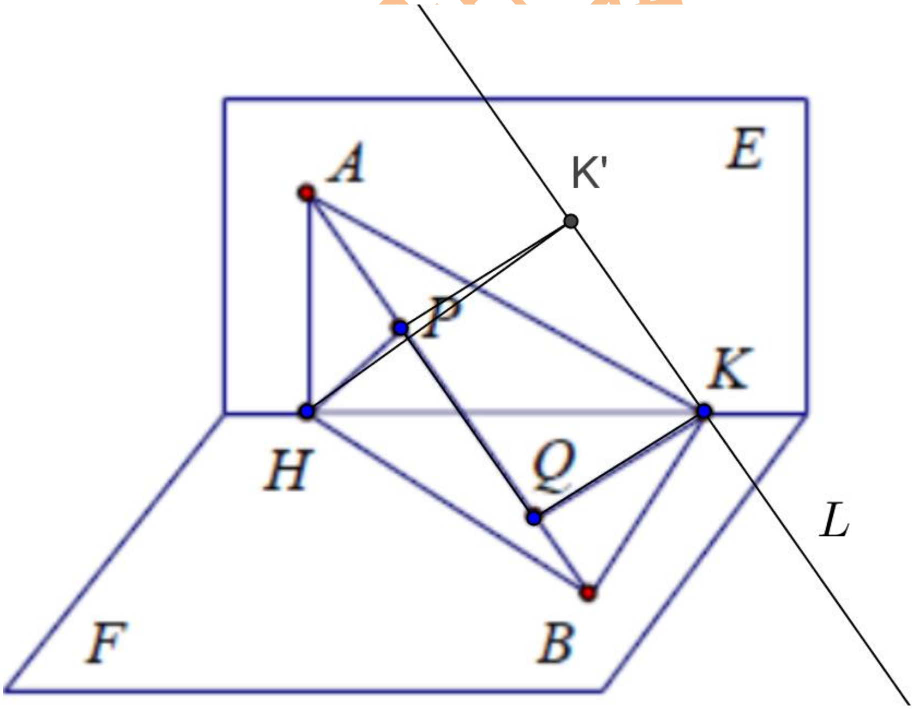
過 K 點作一直線 L 平行 $\overline{AB}$，令 P 點與 L 的垂足為 K'，則 $\overline{KK'}=\overline{PQ}$、$\overline{PK'}=\overline{QK}$，

$\overline{KK'}\perp\overline{PK'}$ 且 $\overline{KK'}\perp\overline{PH}\Rightarrow\overline{KK'}\perp\overline{HK'}$，所求之兩面角即為 $\theta=\angle HPK'$。

利用 $\overline{KK'}\perp\overline{HK'}$，可知 $\Delta HKK'$ 為直角三角形，$\overline{HK'}^2=\overline{HK}^2-\overline{KK'}^2$；而由餘弦定理

可知 $\overline{HK'}^2=\overline{PH}^2+\overline{PK'}^2-2\times\overline{PH}\times\overline{PK'}\cos\theta$，兩式相等可知

$2^2-(\dfrac{4}{9})^2=(\dfrac{28\sqrt{2}}{9})^2+(2\sqrt{5})^2-2\times\dfrac{28\sqrt{2}}{9}\times2\sqrt{5}\times\cos\theta$，可得 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$。



104 建國中學

A0037

1	已知袋中有 2 個黑球和 3 個白球，今每次自袋中隨機取出 2 球(袋中所有球被取得的機會皆均等)，且將取得的黑球丟棄，白球放回袋中(即若取得二白球，則皆放回袋中；若取得一黑球一白球，則將黑球丟棄、白球放回袋中；若取得二黑球，則兩球皆丟棄)，在如此規則下取球三次，試問在第三次取得一黑球一白球之機率為？ 【解答】$\frac{147}{500}$ 【詳解】每一次結束後，可能出現的結果只有三種：2 黑 3 白、1 黑 3 白、0 黑 3 白。 若未取之前為 2 黑 3 白，取球一次後有 $\frac{C_2^3}{C_2^5}=\frac{3}{10}$ 仍是 2 黑 3 白，有 $\frac{C_1^3C_1^2}{C_2^5}=\frac{6}{10}$ 是 1 黑 3 白，有 $\frac{1}{10}$ 為 0 黑 3 白。 若未取之前為 1 黑 3 白，取球後有 $\frac{C_2^3}{C_2^4}=\frac{1}{2}$ 仍是 1 黑 3 白，有 $\frac{1}{2}$ 為 0 黑 3 白。 可作轉移矩陣 $\begin{array}{c} b=2\quad 1\quad 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & 0 & 0 \\ \frac{6}{10} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$，取完兩次之後的情況為 $\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & 0 & 0 \\ \frac{6}{10} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{100} \\ \frac{48}{100} \\ \frac{43}{100} \end{bmatrix}$。 所求 $=\frac{9}{100}\times\frac{6}{10}+\frac{48}{100}\times\frac{1}{2}=\frac{147}{500}$。	104 建 國 中 學				A 0 0 3 8

<table>
<tr><td>1</td><td>已知自然數 n 滿足以下四個條件：
(1)$1\le n\le 10^6$
(2) n 之十進制表示法皆不含數字 1 且不含數字 8 且不含數字 9；
(3) n 為 7, 11, 13 之公倍數；
(4) n 不是 9 的倍數，
試問這樣的自然數 n 共有幾個？

【解答】304
【詳解】7, 11, 13 之最小公倍數為1001，可設$n=1001\times k$ ，$k\in N$ 。
由於$1\le n\le 10^6$ ，可知$1001\times k\le 1000000$ ，所以$k\le 999$ 。
此題亦即找正整數 1 到 999 中，不含數字 1 且不含數字 8 且不含數字 9 且不為 9 的倍數之自然數個數。
設 n 的百位、十位、個位數字分別為a,b,c，由於表示的是 1 到 999 的數，所以a,b,c可為$0,2,3,4,5,6,7$中的數，但不可同時為 0，可能有7^3-1種。
還需扣掉其中為 9 的倍數者，由$0,2,3,4,5,6,7$中可選出
$(7,7,5),(7,6,5),(6,6,6),(7,2,0),(6,3,0),(5,4,0),(5,2,2),(4,3,2),(3,3,3)$的排列，結果為 9 的倍數。因此需扣掉$6\times 5+3\times 2+1+1=38$種，所求即為$343-1-38=304$種。</td><td>104
建
國
中
學</td><td></td><td></td><td>A
0
0
3
9</td></tr>
<tr><td>1</td><td>設 m,k 均為實數，已知函數$y=f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$的 3 個反曲點均在直線$y=mx+k$上，則數對$(m,k)=$？

【解答】$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$
【詳解】$f'(x)=\dfrac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+1)^2}$ ，$f''(x)=\dfrac{2(2x^3+3x^2-6x-1)}{(x^2+1)^3}$ 。
反曲點$f''(x)=0$ ，設三個解為α,β,γ ，因三個反曲點均在直線$y=mx+k$上，所以
$(mx+k)-\dfrac{2x+1}{x^2+1}=0$的解也是$\alpha,\beta,\gamma$ 。
展開比較分子部分係數可知 $(mx+k)(x^2+1)-(2x+1)=t(2x^3+3x^2-6x-1)$ ，解
$\dfrac{m}{2}=\dfrac{k}{3}=\dfrac{m-2}{-6}=\dfrac{k-1}{-1}$ ，可得$m=\dfrac{1}{2},k=\dfrac{3}{4}$ 。</td><td>104
建
國
中
學</td><td></td><td></td><td>A
0
0
4
0</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>設 a,b 皆為正整數，若a^2+3b與b^2+3a都是完全平方數，則$a+b$的最大值為？

【解答】27
【詳解】令$a^2+3b=m^2$，$b^2+3a=n^2$。不失一般性設$a\ge b$，
所以$m^2=a^2+3b\le a^2+3a<a^2+4a+4=(a+2)^2\Rightarrow a^2<m^2<(a+2)^2$，可知$m=a+1$。
$a^2+3b=m^2=(a+1)^2\Rightarrow a=\dfrac{3b-1}{2}$，代入$b^2+3a=n^2$，可知$b^2+\dfrac{9}{2}b-\dfrac{3}{2}=n^2$為一完全平方數。
因 b 為正整數，所以顯然$b^2+\dfrac{9}{2}b-\dfrac{3}{2}=n^2>b^2$；而且
$(b+3)^2=b^2+6b+9>b^2+\dfrac{9}{2}b-\dfrac{3}{2}=n^2$，可知$(b+3)^2>n^2>b^2$，n 為$b+1$ 或$b+2$。
若$n=b+1$，$b^2+\dfrac{9}{2}b-\dfrac{3}{2}=(b+1)^2\Rightarrow b=1$，此時$a=1$ 。
若$n=b+2$，$b^2+\dfrac{9}{2}b-\dfrac{3}{2}=(b+2)^2\Rightarrow b=11$，此時$a=16$。
故所求$a+b$的最大值為 27。</td>
<td>104
建
國
中
學</td>
<td></td>
<td></td>
<td>A
0
0
4
1</td>
</tr>
</table>

1

某遊戲規則如下：甲生先從 1,2, ,50 這 50 個號碼任選 8 個不同的號碼。然後莊家再另從編號 1,2, ,50 的這 50 個號碼球中抽出號碼球，每次任取一球，但取後不放回。當莊家抽出的號碼球均有甲生所選的 8 個號碼時，此時遊戲結束。試問：當遊戲結束時，莊家抽出號碼球個數的期望值為？

【解答】$\frac{136}{3}$

【詳解】

$$E(X)=\sum x\cdot P(x)=\sum_{k=8}^{50}k\cdot\frac{C_7^{k-1}}{C_8^{50}}=\frac{1}{C_8^{50}}\sum_{k=8}^{50}k\cdot\frac{(k-1)!}{7!(k-8)!}=\frac{1}{C_8^{50}}\cdot 8\sum_{k=8}^{50}\frac{k(k-1)!}{8\cdot 7!(k-8)!}=\frac{8}{C_8^{50}}\sum_{k=8}^{50}C_8^k$$

$$=\frac{8}{C_8^{50}}C_9^{51}=\frac{8\times 51}{9}=\frac{136}{3}$$

【備註】已知袋中有 r 個紅球，$N-r$ 個白球，一次取一個(取後不放回)，若 X 表示紅球被取完時的取球總次數。

$$E(X)=\sum x\cdot P(x)=\sum_{k=r}^{N}k\cdot\frac{C_{r-1}^{k-1}}{C_r^N}=\frac{1}{C_r^N}\sum_{k=r}^{N}k\cdot\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}=\frac{1}{C_r^N}\cdot r\sum_{k=r}^{N}C_r^k$$

$=\frac{1}{C_r^N}\cdot r\cdot C_{r+1}^{N+1}=\frac{r(N+1)}{r+1}$。此題中可套用為 $\frac{r(N+1)}{r+1}=\frac{8\times 51}{9}=\frac{136}{3}$。

相同證法可知 $E(X^2+X)=\sum x(x+1)\cdot P(x)=\frac{1}{C_r^N}\cdot r(r+1)\cdot C_{r+2}^{N+2}=\frac{r(N+1)(N+2)}{(r+2)}$，

$E(X^2)=E(X^2+X)-E(X)=\frac{r(N+1)(rN+r+N)}{(r+1)(r+2)}$。

所以 $Var(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{r(N+1)(N-r)}{(r+1)^2(r+2)}$。

104 建國中學

A0042