1	已知數列$< a_n >$對於任意正整數 p,q，恆有 $a_p+a_q=a_{p+q}$，若 $a_1=13$，求 a_{2015}？ 【解答】26195 【詳解】$a_{2015}=a_{1+1+...+1}=a_1+a_1+...+a_1=2015\times 13=26195$	104台中女中			A0016
1	在ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，D 為 $\overline{AC}$ 的中點，且 $\overline{BD}=\sqrt{3}$，若 $\overline{AB}=k$ 時，ΔABC的面積有最大值 M，則數對$(k,M)=$ ？ 【解答】$(\frac{2\sqrt{15}}{3},2)$ 【詳解】設 $\overline{AB}=k=2a$，則ΔABD邊長為$2a,a,\sqrt{3}$，且ΔABD面積為ΔABC面積的一半，因此可改求ΔABD面積的最大值$\frac{M}{2}$，利用海龍公式可知$s=\frac{3a+\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{M}{2}=\sqrt{(\frac{3a+\sqrt{3}}{2})(\frac{a+\sqrt{3}}{2})(\frac{-a+\sqrt{3}}{2})(\frac{3a-\sqrt{3}}{2})}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{(3-a^2)(3a^2-1)}$，令 $a^2=t>0$，可知$\frac{M}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{(3-t)(3t-1)}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{-3(t-\frac{5}{3})^2+\frac{16}{3}}$，因此 M 的最大值為 $2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{\frac{16}{3}}=2$，此時$t=a^2=\frac{5}{3}$，$k=2a=2\times\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$	104台中女中			A0017

1

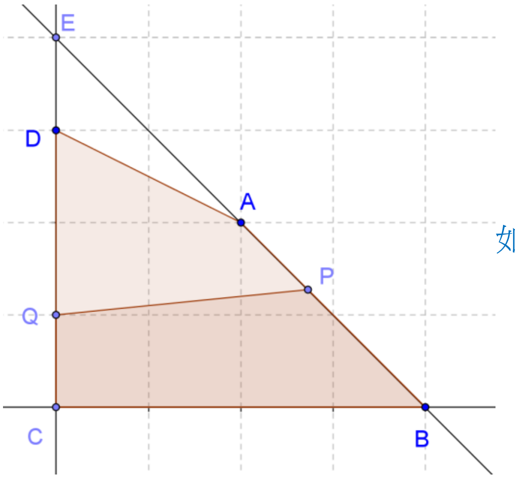
四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=2\sqrt{2}$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=3$，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=90^\circ$，點 P 在 $\overline{AB}$ 上，點 Q 在 $\overline{CD}$ 上，若 $\overline{PQ}$ 平分四邊形 ABCD 的面積，則 $\overline{PQ}$ 的最小值為？

104 台中女中

A0018

【解答】$3\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

【詳解】



如圖，由題目條件可算出四邊形 ABCD 的面積為 7，所以 $PQCB$ 面積為 $\dfrac{7}{2}$，延長 $\overline{AB},\overline{CD}$ 交於 E 點，可知 $\angle PEQ=45^\circ$，且 ΔPEQ 面積為 $8-\dfrac{7}{2}=\dfrac{9}{2}$。

利用 $\overline{PQ}^2=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{PE}\right|^2+\left|\overrightarrow{EQ}\right|^2+2\left|\overrightarrow{PE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EQ}\right|\cdot\cos 45^\circ$，

又 ΔPEQ 面積可寫為 $\dfrac{1}{2}\overline{EP}\cdot\overline{EQ}\cdot\sin 45^\circ$，所以可知 $\dfrac{1}{2}\overline{EP}\cdot\overline{EQ}\cdot\sin 45^\circ=\dfrac{9}{2}$，代入前式

可得 $\overline{PQ}^2=\left|\overline{PE}\right|^2+\left|\overline{EQ}\right|^2+18$。

由算幾不等式可知 $\dfrac{\left|\overline{PE}\right|^2+\left|\overline{EQ}\right|^2}{2}\geq\sqrt{\left|\overline{PE}\right|\left|\overline{EQ}\right|}$，等號成立時 $\left|\overline{PE}\right|^2=\left|\overline{EQ}\right|^2$，設

$\left|\overline{PE}\right|^2=\left|\overline{EQ}\right|^2=x^2$，代入 ΔPEQ 面積可求得 $x^2=9\sqrt{2}$，所求 $\overline{PQ}^2=9\sqrt{2}+9\sqrt{2}+18$，

$\overline{PQ}=3\sqrt{2\sqrt{2}-2}$。

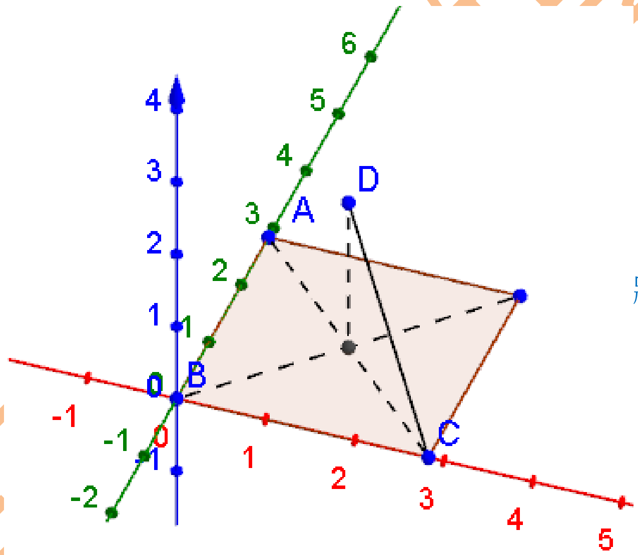
<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>骰子樂的遊戲規則如下：總共有三關，每關投擲兩顆公正的骰子，若點數和是 3 的倍數，則籌碼變成現有的 $\frac{5}{4}$ 倍，並可繼續投擲；若點數和是 7，則籌碼變成現有的 $\frac{1}{2}$ 倍，並可繼續投擲；若點數和不是 3 的倍數且點數和不是 7，則獎金歸零並停止投擲。已知參賽者一開始有 100 萬的籌碼，若順利經過三關後，則可依上述的遊戲規則獲得等值的獎金。請問第三關結束後，獲得獎金之期望值為多少元？

【解答】125000

【詳解】易知點數和是 3 的倍數機率為 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$，點數和是 7 機率為 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。

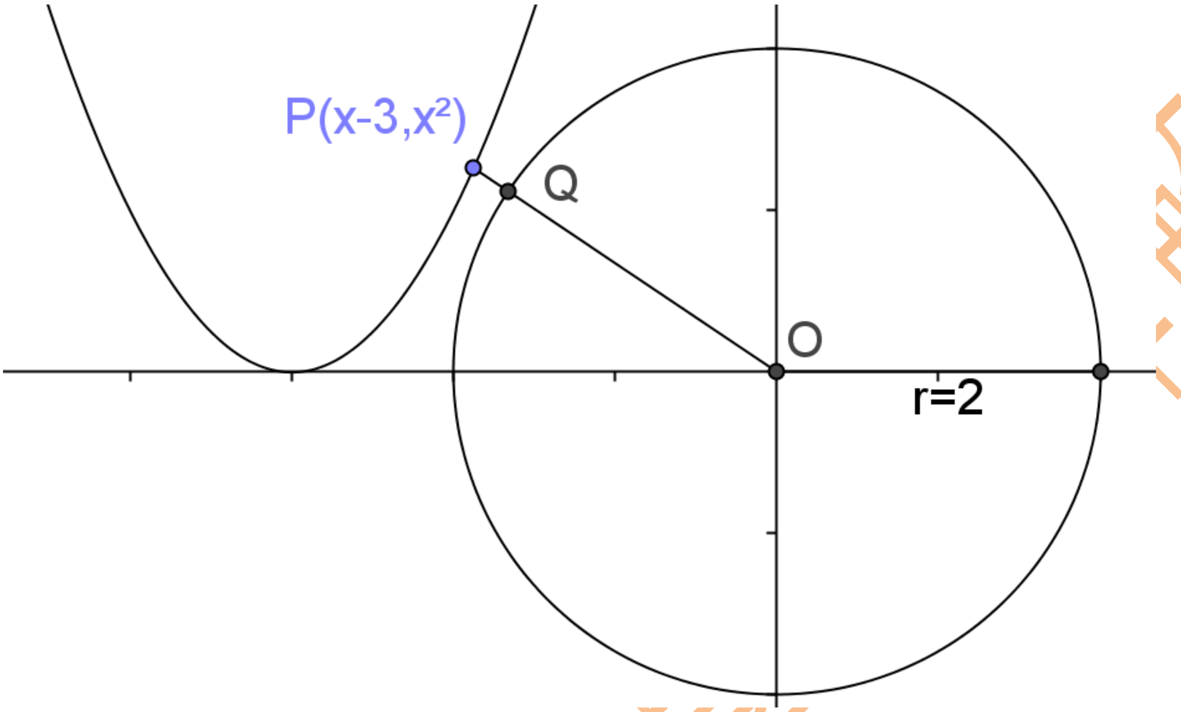
所求期望值 $=1000000\times(\frac{1}{3}\times\frac{5}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 0)^3=1000000\times(\frac{1}{2})^3=125000$</td>
<td>104
台
中
女
中</td>
<td></td>
<td></td>
<td>A
0
0
1
9</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>有一邊長為 $2\sqrt{2}$ 的正方形 ABCD。今沿著它的對角線 $\overline{AC}$ 摺起，使得平面 ABC 與平面 ACD 互相垂直，則直線 AB 與直線 CD 間的公垂線段長(亦即此兩直線間的距離)為？

【解答】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

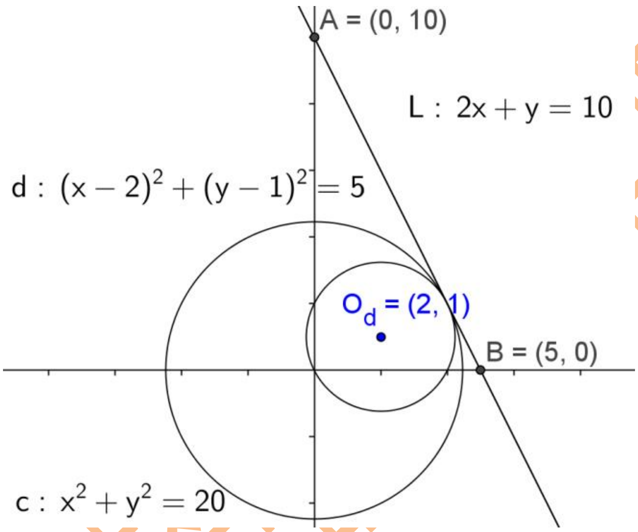
【詳解】將各點坐標化，令

$A(0,2\sqrt{2},0),B(0,0,0),C(2\sqrt{2},0,0)$，可求出 $D(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$。計算兩直線 AB,CD 公垂線段長，$\overline{V_{AB}}=(0,1,0),\overline{V_{CD}}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},2)$，可得 $\overline{V_{AB}}\times\overline{V_{CD}}=(2,0,\sqrt{2})$，設 AB 所在的平面為 $2x+\sqrt{2}z=0$，將 $C(2\sqrt{2},0,0)$ 代距離公式 $d(E_{AB},C)=\frac{\left|2\cdot 2\sqrt{2}+0\right|}{\sqrt{2^2+\sqrt{2}^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$</td>
<td>104
台
中
女
中</td>
<td></td>
<td></td>
<td>A
0
0
2
0</td>
</tr>
</table>

1	已知 $f(x)$ 為多項式函數，$f(0)=1$，若 $g(x)=x^{2015}+2015x$，且對實數 x,y 恆有 $f(x+y)=f(x)+g(y)$，則 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=$ ？ 【解答】2 【詳解】由 $f(x+y)=f(x)+g(y)$ 可知 $f(y)=f(0+y)=f(0)+g(y)$，所以 $f(x)=f(0)+g(x)=x^{2015}+2015x+1$，$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2016}x^{2016}+\frac{2015}{2}x^{2}+x\bigg\vert_{-1}^{1}=2$ 。	104 台 中 女 中			A 0 0 2 1
1	已知 c 為一實數，使方程式 $4x^3-24x^2+(47+c)x-(33+3c)=0$ 恰好有一實根，求 c 值的範圍為？ 【解答】$c>-2$ 【詳解】原式 $x^3-6x^2+\frac{(47+c)}{4}x-\frac{(33+3c)}{4}=0$，平移 $x'=x+2$，可化為 $x^3+(\frac{c-1}{4})x+(\frac{-3-c}{4})=0$，代三次方程式判別式 $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$，可得 $(\frac{-3-c}{4})^2+\frac{1}{27}(\frac{c-1}{4})^3>0\Rightarrow c^3+24c^2+165c+242>0$，因式分解為 $(c+2)(c+11)^2>0$，所以可得 c 值的範圍為 $c>-2$ 。	104 台 中 女 中			A 0 0 2 2

1	試求 $(x-3-2\sin y)^2+(x^2-2\cos y)^2$ 的最小值？ 【解答】$9-4\sqrt{5}$ 【詳解】  所求可視為 $(x-3,x^2),(2\sin y,2\cos y)$ 兩點的距離平方最小值，也就是拋物線 $y=(x+3)^2$ 與圓 $x^2+y^2=4$ 兩點距離最小值平方 $\overline{PQ}^2$，可先算拋物線上一點到圓心 $(0,0)$ 的距離再扣掉半徑。 $\overline{PO}^2=(x-3)^2+(x^2)^2$，對 x 微分可得 $\frac{d\overline{PO}^2}{dx}=4x^3+2x-6$，易知一階導數為 0 時， $x=1$。將 $x=1$ 代入可知 $P(-2,1)$，所以 $\overline{PQ}=\sqrt{5}-2,\overline{PQ}^2=9-4\sqrt{5}$	104 台中女中			A0023

1	設 $\frac{7}{3}\le x\le\frac{9}{2}$，$f(x)=\sqrt{3x-7}+2\sqrt{9-2x}$，則 $f(x)$ 最大值為？ 【解答】$\sqrt{\frac{143}{6}}$ 【詳解】利用柯西不等式 $\left[(\sqrt{\frac{3x-7}{3}})^2+(\sqrt{\frac{9-2x}{2}})^2\right]\times\left[(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2\right]\ge(\sqrt{3x-7}+2\sqrt{9-2x})^2$，可知 $\left[\frac{3x-7}{3}+\frac{9-2x}{2}\right]\times\left[(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2\right]\ge(\sqrt{3x-7}+2\sqrt{9-2x})^2$，所以 $\frac{13}{6}\times 11\ge(\sqrt{3x-7}+2\sqrt{9-2x})^2\Rightarrow\sqrt{3x-7}+2\sqrt{9-2x}\le\sqrt{\frac{143}{6}}$。	104 台 中 女 中			A 0 0 2 4
1	今有 20 枝相同的筆要全部分給 A、B、C、D 四人，每人至少分得一枝，若僅考慮四人所獲得筆的數量，則 A 獲得的數量大於 B 獲得的數量之分法有幾種？ 【解答】444 【詳解】先每人各分一枝，剩餘 16 支給 4 人分。 (1)考慮 $A+B=16, C+D=0$，此時有 8×1 種。 (2)考慮 $A+B=15, C+D=1$，此時有 8×2 種。 (3)考慮 $A+B=14, C+D=2$，此時有 7×3 種。 (4)考慮 $A+B=13, C+D=3$，此時有 7×4 種。 以此類推，可知所求為 $8\times(1+2)+7\times(3+4)+6\times(5+6)+...+1\times(15+16)$，直接計算即可得 444。	104 台 中 女 中			A 0 0 2 5

1	設 (x,y) 為圓 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 上一動點，且 (x,y) 非原點，則所有複數點 $z=\dfrac{20}{x+yi}$ 的軌跡方程式為？ 【解答】$2x-y-10=0$ 【詳解】同取絕對值 $\lvert z\rvert=\dfrac{20}{\lvert x+yi\rvert}$，可知 $\lvert z\rvert\lvert x+yi\rvert=20$，可視為 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 對 $x^2+y^2=20$ 作反演，結果為一直線。 	104台中女中			A0026

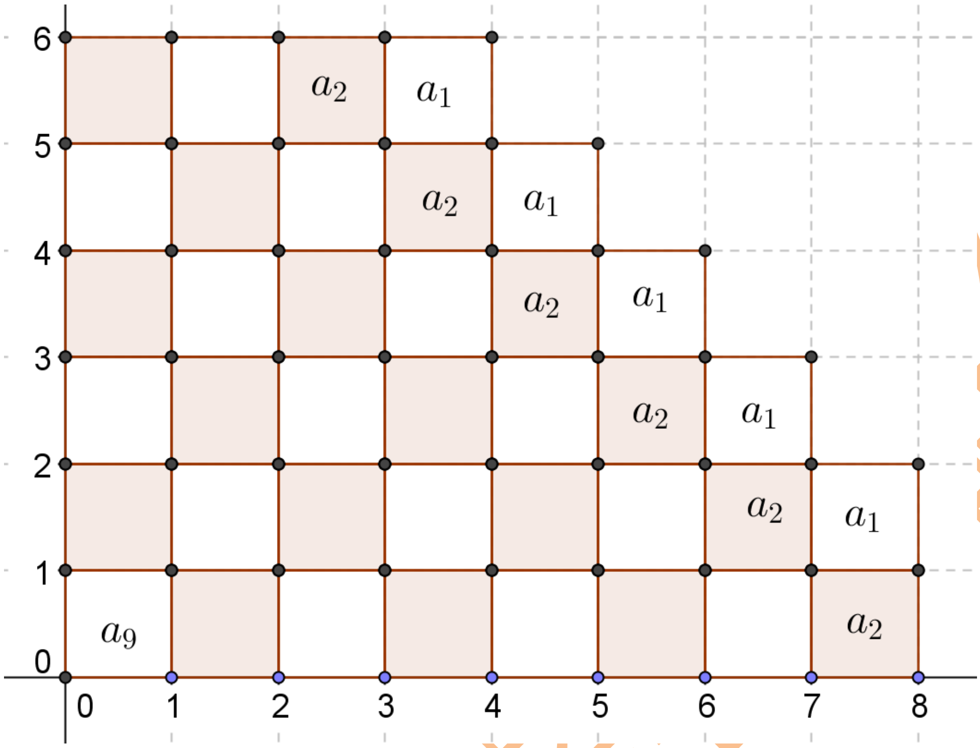
1	設數列 $a_n=\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}$，$S_{n+1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2n+1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}(\frac{1}{S_{n+1}}+\frac{1}{S_{n+2}}+\frac{1}{S_{n+3}}+\ldots\ldots+\frac{1}{S_{2n}})=$ ？ 【解答】$\frac{3}{2}(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})$ 【詳解】$a_n=\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}=\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)(n-1)}+\sqrt[3]{(n-1)^2}$ 令 $\sqrt[3]{(n+1)}=a,\sqrt[3]{(n-1)}=b$，則 $a_n=a^2+ab+b^2=\frac{a^3-b^3}{(a-b)}=\frac{2}{\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{(n-1)}}$， 因此 $\frac{1}{a_n}=\frac{\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{(n-1)}}{2}$， 所以 $S_{n+1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2n+1}}$ $=\frac{1}{2}\left[(\sqrt[3]{(1+1)}-\sqrt[3]{(1-1)})+(\sqrt[3]{(3+1)}-\sqrt[3]{(3-1)})+\ldots\ldots+(\sqrt[3]{(2n+1+1)}-\sqrt[3]{(2n+1-1)})\right]$ $=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2n+2)}$ 所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}(\frac{2}{\sqrt[3]{(2n+2)}}+\frac{2}{\sqrt[3]{(2n+4)}}+\frac{2}{\sqrt[3]{(2n+6)}}+\ldots\ldots+\frac{2}{\sqrt[3]{(2n+2n)}})$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt[3]{n}}{n}(\frac{1}{\sqrt[3]{(2n+2)}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(2n+4)}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(2n+6)}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{(2n+2n)}})$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt[3]{n}}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(1+i)}}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{4}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+i)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{4}\cdot\int_0^1(1+x)^{-\frac{1}{3}}dx=\sqrt[3]{4}\times\left[\frac{3}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{2}(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})$	104 台 中 女 中			A 0 0 2 7

<table>
<tr><td>1</td><td>

若$0\le x<8$，$0\le y<6$，則在空間中$[x]+[y]+[2z]=8$的圖形體積為？([ ]為高斯符號)

【解答】19

【詳解】



當$0\le z<\frac{1}{2}$時，$[x]+[y]=8$ 的圖形為標有a_1的 5 個正方形，同理，$\frac{1}{2}\le z<1$時，$[x]+[y]=7$的圖形為標有a_2的 6 個正方形，所以可將此圖形體積拆成許多高為$\frac{1}{2}$，底面為邊長為 1 的正方體，由上圖可知總個數為 38 個。所求$=\frac{1}{2}\times 38=19$。

</td><td>104
台
中
女
中</td><td></td><td></td><td>A
0
0
2
8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>

設$O(0,0)$，$L:x-3=0$，已知Γ上動點 P 滿足$\overline{OP}=2d(P;L)$，若平面上一點$A(-4,2)$，則$2\overline{PA}+\overline{PO}$的最小值為？

【解答】14

【詳解】$2\overline{PA}+\overline{PO}=2\overline{PA}+2d(P;L)\le 2d(A;L)=2\times 7$，故所求為 14。

</td><td>104
台
中
女
中</td><td></td><td></td><td>A
0
0
2
9</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1</td><td>設多項式 $f(x)=x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ，其中 $a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1,a_0$ 是集合 $\{1,2,3,4,\ldots,10\}$ 中的七個相異元素，若 x^3+x^2+x+1 是多項式 $f(x)$ 的因式，試問有幾個滿足條件的多項式 $f(x)$ ？

【解答】288
【詳解】 $x^3+x^2+x+1=(x^2+1)(x+1)$ ，所以
$f(-1)=-1+a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=0\Rightarrow a_6+a_4+a_2+a_0=a_5+a_3+a_1+1$ ，
$f(i)=(-a_6+a_4-a_2+a_0)+i(-1+a_5-a_3+a_1)=0\Rightarrow a_4+a_0=a_6+a_2, a_5+a_1=a_3+1$
將 $f(i)$ 的條件代入 $f(-1)$ 的條件，可得 $2(a_4+a_0)=2(a_3+1)$ ，因此有
$1+a_3=a_4+a_0=a_6+a_2=a_5+a_1$ 。
考慮 a_3 可能的數，若 $a_3=10$ ，則 (a_4,a_0) 、 (a_6,a_2) 、 (a_5,a_1) 可能的組合為
$(2,9),(3,8),(4,7),(5,6)$ ，有 $(4\times3\times2)\times2^3=196$ 種。
若 $a_3=9$ ，則可能的組合為 $(2,8),(3,7),(4,6)$ ，有 $(3\times2\times1)\times2^3=48$ 種。
若 $a_3=8$ ，則可能的組合為 $(2,7),(3,6),(4,5)$ ，有 $(3\times2\times1)\times2^3=48$ 種。
若 $a_3=7$ ，則可能的組合為 $(2,6),(3,5)$ ，不滿足相異的條件，因此 $a_3\le7$ 皆不合。
所以共有 $196+48+48=288$ 種。</td><td>104
台
中
女
中</td><td></td><td></td><td>A
0
0
3
0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>試求 $\sin^2(2015)+\sin^2(2015+\frac{\pi}{2014})+\sin^2(2015+\frac{2\pi}{2014})+\ldots\ldots+\sin^2(2015+\frac{2013\pi}{2014})$ 之值為？

【解答】1007
【詳解】 $\sin^2(2015+\frac{k\pi}{2014})=\cos^2(\pi-2015-\frac{k\pi}{2014})=\cos^2(\frac{(2014-k)\pi}{2014}-2015)$
$=\cos^2(2015-\frac{(2014-k)\pi}{2014})$
兩兩配對之後加總為 1，所以共有 $\frac{2014}{2}=1007$ 。</td><td>104
台
中
女
中</td><td></td><td></td><td>A
0
0
3
1</td></tr>
</table>