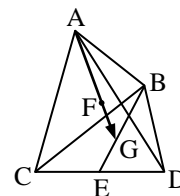


壹、填充題：共 5 題，每題 4 分，共 20 分，答案請化至最簡，否則不予計分。

1. 求 $16\cos^4 40^\circ + 24\cos^3 40^\circ - 12\cos^2 40^\circ - 16\cos 40^\circ + 5$ 之值 = _____。
2. 三正整數 a 、 b 、 c 分別為 32 位數、31 位數、30 位數，且 $a+b$ 、 $b+c$ 分別為 33 位數、32 位數，則 $\log ab$ 的首數為_____。
3. 在銳角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AC} = 8$ 。若 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則 $\overline{AH} =$ _____。
4. 已知 $\triangle ABC$ 的三個頂點均在拋物線 $\Gamma: y^2 = 4cx$ ($c > 0$) 上，且 $\triangle ABC$ 的重心恰為拋物線的焦點 $F(c, 0)$ 。若邊 \overline{BC} 所在的直線方程式為 $4x + y - 20 = 0$ ，則 c 之值為_____。
5. 在三位數 \overline{abc} 中，若滿足 $a \leq b \leq c$ ，則稱此三位數為「奮發數」(如：234、335、666)；若滿足 $a \geq b \geq c$ ，則稱此三位數為「墮落數」(如：432、553、666)。若三位數既不是奮發數也不是墮落數(如：243、353)，則稱為「搖擺數」。求在所有三位數中，有 _____ 個「搖擺數」。

貳、填充題：共 5 題，每題 5 分，共 25 分，答案請化至最簡，否則不予計分。

6. 如右圖，四面體 $ABCD$ ， E 在 \overline{CD} 上，且 $\overline{CE} : \overline{ED} = 2 : 3$ ， G 在 \overline{BE} 上， F 在 \overline{AG} 上滿足 $k\overline{AF} = 3\overline{AB} + 3\overline{AC} + 2\overline{AD}$ ， $\overline{BG} = r\overline{BE}$ ， $r =$ _____。



7. 已知 $a > 0$ ，點 A 、點 $B(2, 5, 1)$ 、點 $C(5, -3, -2)$ ，若點 $P(a, b, c)$ 到平面 ABC 的投影點為 $Q(3, -1, 0)$ ，且點 P 到平面 ABC 的距離為 $7\sqrt{2}$ ，則數對 $(a, b, c) =$ _____。
8. 設直線 L 與三次函數 $y = x^3 + x + 1$ 的圖形有三個不同的交點 A 、 B 、 C ，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}$ ，求直線 L 的方程式為_____。
9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊分別為 a 、 b 、 c 。若 $a = 5$ 、 $b = 4$ 且 $\cos(A - B) = \frac{31}{32}$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。
10. 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ ，求 $\prod_{0 \leq k < j \leq 4} (\omega^k - \omega^j)^2 =$ _____。
(其中 $\prod_{0 \leq k < j \leq 4}$ 為連乘符號，例如： $\prod_{0 \leq k < j \leq 2} (a_k - a_j)^2 = (a_0 - a_1)^2 (a_0 - a_2)^2 (a_1 - a_2)^2$)

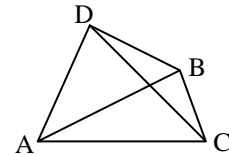
參、填充題：共 5 題，每題 6 分，共 30 分，答案請化至最簡，否則不予計分。

11. 已知 a, b, c, d, e 均為實數， $i = \sqrt{-1}$ ， $f(x) = ix^{10} + 7x^9 - 5x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 - 5$ ，若 $f(i+1) = 4 - 8i$ ，則 $f(-i+1) =$ _____。

12. 設連乘積 $\prod_{k=1}^{19} (x+k) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+18)(x+19) = \sum_{k=0}^{19} a_k x^k$ ，求 $a_{16} =$ _____。

13. 如右圖，四面體 $ABCD$ ， $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = 26$ 、 $\overline{BC} = 10\sqrt{3}$ 、 $\cos \angle BAC = \frac{1}{2}$ ，

$\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，則 $|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD})| =$ _____。



14. 函數 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < \frac{25}{2} \\ \lceil \frac{x}{3} \rceil, & x \geq \frac{25}{2} \end{cases}$ ，其中 $\lceil \frac{x}{3} \rceil$ 表示不大於 $\frac{x}{3}$ 的最大整數，若 $\sum_{k=1}^n f(k) = 6240$ ，則 n 之值為 _____。

15. 假設 A 細菌每過 5 小時數量變為 4 倍，B 物質每過 15 小時重量變為 $\frac{4}{5}$ 倍。2015 年 4 月 1 日零時，量測出 A 細菌的總數為 n 個及 B 物質的重量為 W 公克，一段時間後，A 細菌變為 $10^{10}n$ 個，B 物質的重量為 rW 公克。則 r 之值為 _____。(四捨五入至小數點第一位)

肆、計算證明題 (共 25 分)

1. 試求多項式 $x^{2015} - 3x^{1008} + x^8 + x^3 + 4x^2 - x + 1$ 除以 $x^5 - x^3 + x$ 的餘式。(8 分)

2. 在銳角 $\triangle ABC$ 中， $a = \overline{BC}$ 、 $b = \overline{CA}$ 、 $c = \overline{AB}$ 、 R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑， O 為 $\triangle ABC$ 的外心， H 為 $\triangle ABC$ 的垂心。

請證明 $\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ 。(8 分)

3. 一次擲 2 顆公正的骰子，出現的點數和記為 N 。設 N 被表示為 $N = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d$ ，其中 $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ 。設隨機變數 X 為 a, b, c, d 中取值為 1 的個數。

(1) 求 X 的機率分布。(6 分)

(2) 求 X 的標準差 $\sigma(X) = ?$ (3 分)

【試題結束】