2015 第 66 屆 AMC12B 試題

俞克斌老師編寫

1. 試問$2-(-2)^{-2}$的值爲何？
(A)-2　(B)$\frac{1}{16}$　(C)$\frac{7}{4}$　(D)$\frac{9}{4}$　(E)6。　【104AMC12B】

答：(C)

解：所求$=2-\frac{1}{(-2)^2}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

2. 瑪麗連續做三個時間相同而不間斷的工作。她在下午1：00開始做第一個工作，於下午2：40做完第二個工作，則她於何時做完第三個工作？
(A)下午3：10　(B)下午3：30　(C)下午4：00　(D)下午4：10　(E)下午4：30。
【104AMC12B】

答：(B)

解：$1:00\to1:50\to2:40\to3:30$

3. 艾澤克寫了一個整數2次，又寫了另一個整數3次，已知這5個數的和是100，其中一個數是28，則另一個數是多少？
(A)8　(B)11　(C)14　(D)15　(E)18。　【104AMC12B】

答：(A)

解：$a\times2+28\times3=100\Rightarrow a=8$　　$28\times2+a\times3=100\Rightarrow a=\frac{44}{3}$（不合）

4. 大衛、希克梅特、傑克、瑪塔、蘭德、陶德與其他6人一起參加12人的賽跑。比賽結束後，成績如下：蘭德超前希克梅特6名，瑪塔落後傑克1名，大衛落後希克特梅2名，傑克落後陶德2名，陶德落後蘭德1名，且瑪塔得到第6名。請問誰是第8名？
(A)大衛　(B)希克梅特　(C)傑克　(D)蘭德　(E)陶德。　【104AMC12B】

答：(B)

解：蘭德$\xrightarrow{+1}$陶德$\xrightarrow{+2}$傑克$\xrightarrow{+1}$瑪塔$\xrightarrow{+2}$希克梅特$\xrightarrow{+2}$大衛
（2）　（3）　（5）　（6）　（8）　（10）

5. 老虎隊在最初三場比賽中擊敗鯊魚隊兩次，然後這兩隊繼續再比賽N場，若鯊魚隊想在所有賽程中至少有95%的勝率，則N可能最小值爲何？
(A)35　(B)37　(C)39　(D)41　(E)43。　【104AMC12B】

答：(B)

解：$\frac{1+N}{3+N}\geq95\%\Rightarrow N=37$

6. 回溯到西元1930年，蒂莉必須背誦從0×0至12×12的乘法表。如同九九乘法表，這個乘法表的行與列均由0～12所構成，求其乘開後表中所列的數中，奇數個數所佔的比率是多少？（四捨五入至小數點後第二位）
(A)0.21　(B)0.25　(C)0.46　(D)0.50　(E)0.75。　【104AMC12B】

答：(A)

解：$\frac{6\times6}{13\times13}\fallingdotseq0.213\cdots\cdots$

7. 一個正15邊形有L條對稱軸，且圖形繞著中心旋轉與原圖形完全疊合的最小角度爲R度，請問$L+R$爲何？
(A)24　(B)27　(C)32　(D)39　(E)54。　【104AMC12B】

答：(D)

解：$L=15$，$R=\dfrac{360}{15}=24$

8\. 試問$\left(625^{\log_3 2015}\right)^{\frac{1}{4}}$的值是多少？

(A) 5　(B) $\sqrt[4]{2015}$　(C) 625　(D) 2015　(E) $\sqrt[4]{5^{2015}}$ 。【104AMC12B】

答：(D)

解：所求$=\left(2015^4\right)^{\frac{1}{4}}=2015$

9\. 拉里與朱利葉斯正在玩遊戲：輪流投擲一球，直擊位在壁架上的一個瓶子。由拉里開始投擲，並規定首先擊落瓶子的人爲勝利者，每人每次擊落瓶子的機率是$\dfrac{1}{2}$，且與前面投擲無關，請問拉里贏得這場遊戲的機率爲何？

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$　(E) $\dfrac{4}{5}$ 。【104AMC12B】

答：(C)

解：勝率比$\Rightarrow$拉里：朱利葉斯$=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=2:1$　　故拉里獲勝機率$=\dfrac{2}{3}$

10\. 在所有邊長爲整數，面積爲正且周長小於15的所有不全等的三角形中，共有多少個非等邊，亦非等腰也不是直角三角形？

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6　(E) 7 。【104AMC12B】

答：(C)

解：$(2,3,4)$，$(2,4,5)$，$(2,5,6)$，$(3,4,6)$，$(3,5,6)$　共5組

11\. 直線$12x+5y=60$與兩平面坐標軸形成一個三角形，則此三角形所有高的長度和爲何？

(A) 20　(B) $\dfrac{360}{17}$　(C) $\dfrac{107}{5}$　(D) $\dfrac{43}{2}$　(E) $\dfrac{281}{13}$ 。【104AMC12B】

答：(E)

解：$5+12+\dfrac{5\times12}{13}=\dfrac{281}{13}$

12\. 令a、b、c表三個相異的一位數，則方程式$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$所有根的和其最大值爲何？

(A)15　(B)15.5　(C)16　(D)16.5　(E)17 。【104AMC12B】

答：(D)

解：原式$=(x-b)[2x-a-c]=0\Rightarrow$兩根$b$、$\dfrac{a+c}{2}$

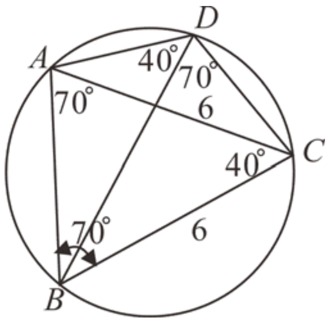
兩根之和最大爲$9+\dfrac{8+7}{2}=16.5$

13\. 四邊形$ABCD$內接於一個圓，其中$\angle BAC=70^\circ$、$\angle ADB=40^\circ$，$\overline{AD}=4$且$\overline{BC}=6$，請問$\overline{AC}$爲多少？

(A) $3+\sqrt{5}$　(B) 6　(C) $\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$　(D) $8-\sqrt{2}$　(E) 7 。【104AMC12B】

答：(B)

解：如圖



14. 已知一個圓的半徑為 2 且圓心在 A 點，另外已知一個等邊三角形的邊長為 4 且其中一個頂點在 A 點。設 a 表示在圓內且在三角形外的區域的面積，而設 b 表示在三角形內且在圓外的區域的面積，請問 $a-b$ 是多少？

(A) $8-\pi$ (B) $\pi+2$ (C) $2\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $4\left(\pi-\sqrt{3}\right)$ (E) $2\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$。【104AMC12B】

答：(D)

解：$a=\pi\times2^2\times\frac{5}{6}=\frac{10}{3}\pi$ $b=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2-\pi\times2^2\times\frac{1}{6}=4\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$

$a-b=4\pi-4\sqrt{3}$

15. 在瑞秋的學校，一個 A 計分 4 點，一個 B 計分 3 點，一個 C 計分 2 點，且一個 D 計分 1 點。她在下列四個學科的 GPA 是以點數總和除以 4 計算而得，她確定在數學與科學這兩科可以拿到 A，且在英文與歷史這兩科至少可以拿到 C。在英文科，她認為有 $\frac{1}{6}$ 機會拿到 A 且有 $\frac{1}{4}$ 機會拿到 B。在歷史科，她有 $\frac{1}{4}$ 機會拿到 A 且有 $\frac{1}{3}$ 機會拿到 B。請問瑞秋的 GPA 至少是 3.5 的機率為多少？

(A) $\frac{11}{72}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{11}{24}$ (E) $\frac{1}{2}$。【104AMC12B】

答：(D)

解：機率 $=1\times1\times\underbrace{\frac{7}{12}}_{\text{英}C}\times\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{歷}A}+1\times1\times\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{英}B}\times\underbrace{\frac{7}{12}}_{\text{歷}AB}+1\times1\times\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{英}A}\times\underbrace{1}_{\text{歷}ABC}=\frac{11}{24}$

16. 一個邊長為 6 的正六邊形的每一邊都附有一個等腰三角形，每個三角形都有邊長為 8 的兩個邊，把這些等腰三角形折起，形成一個以這個六邊形為底的角錐，請問這個角錐體積為何？

(A) 18 (B) 162 (C) $36\sqrt{21}$ (D) $18\sqrt{138}$ (E) $54\sqrt{21}$。【104AMC12B】

答：(C)

解：$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2\times6}_{\text{底面正六邊形面積}}\times\underbrace{\sqrt{8^2-6^2}}_{\text{錐體高}}\times\frac{1}{3}=36\sqrt{21}$

17. 一個不公正的硬幣出現正面的機率是 $\frac{1}{4}$，當投擲 n 次時，恰好出現兩次正面的機率與恰好出現三次正面的機率相同，請問 n 是多少？

(A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 13。【104AMC12B】

答：(D)

解：$C_2^n\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=C_3^n\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}\Rightarrow n=11$

18. 對每一個正合成數n，定義$r(n)$為n的質因數分解中的所有質因數（包括重複）的和，例如，$r(50)=12$，這是因為50的質因數分解是$2\cdot 5^2$且$2+5+5=12$。請問函數r的值域：$\{r(n):n$為正合成數$\}$為何？
(A)所有正整數的集合　(B)所有正合成數的集合　(C)所有正偶數的集合　(D)所有大於3的正整數的集合　(E)所有大於4的正整數的集合。　【104AMC12B】

答：(D)

解：定義域$\{n\,|\,n=4,6,8,9,10,12,14,15,\cdots\cdots\}$

$r(4)=r\left(2^2\right)=2+2=4$，最小，故(A)(E)錯

$r(6)=r(2\times 3)=2+3=5$，故(B)(C)錯

19. 在ΔABC中，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AB}=12$，在三角形外側作正方形$ABXY$及$ACWZ$，若四個點X、Y、Z及W在一圓上，則此三角形的周長是多少？
(A)$12+9\sqrt{3}$　(B)$18+6\sqrt{3}$　(C)$12+12\sqrt{2}$　(D)30　(E)32。　【104AMC12B】

答：(C)

解：弦$\overline{XY}$、$\overline{WZ}$之中垂線，即$\overline{AB}$、$\overline{AC}$之中垂線必過圓心

又$\angle C=90^\circ$，故圓心即$\overline{AB}$之中點M，則半徑為$6\sqrt{5}$

令$\overline{AC}=2t$，$\overline{BC}=2s$，$\begin{cases}(2t)^2+(2s)^2=12^2\\(2t+s)^2+t^2=\left(6\sqrt{5}\right)^2\end{cases}\Rightarrow t=s=3\sqrt{2}$，周長$12\sqrt{2}+12$

20. 對每一個正整數n，令$\bmod_5(n)$表示n除以5的餘數。
定義函數$f:\{0,1,2,3,\cdots\}\times\{0,1,2,3,4\}\to\{0,1,2,3,4\}$遞迴如下：

$$f(i,j)=\begin{cases}\bmod_5(j+1)\text{，當 }i=0\text{ 且 }0\le j\le 4\\ f(i-1,1)\text{，當 }i\ge 1\text{ 且 }j=0\\ f(i-1,f(i,j-1))\text{，當 }i\ge 1\text{ 且 }1\le j\le 4\end{cases}$$

，請問$f(2015,2)=$

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3　(E)4。　【104AMC12B】

答：(B)

解：$\begin{cases}f(0,0)=\bmod_5(1)=1\\f(0,1)=\bmod_5(2)=2\\f(0,2)=\bmod_5(3)=3\\f(0,3)=\bmod_5(4)=4\\f(0,4)=\bmod_5(5)=0\end{cases}$

$\begin{cases}f(1,0)=f(0,1)=2\\f(1,1)=f(0,f(1,0))=f(0,2)=3\\f(1,2)=f(0,f(1,1))=f(0,3)=4\\f(1,3)=f(0,f(1,2))=f(0,4)=0\\f(1,4)=f(0,f(1,3))=f(0,0)=1\end{cases}$　$\begin{cases}f(2,0)=f(1,1)=3\\f(2,1)=f(1,f(2,0))=f(1,3)=0\\f(2,2)=f(1,f(2,1))=f(1,0)=2\\f(2,3)=f(1,f(2,2))=f(1,2)=4\\f(2,4)=f(1,f(2,3))=f(1,4)=1\end{cases}$

$\begin{cases}f(3,0)=f(2,1)=0\\f(3,1)=f(2,f(3,0))=f(2,0)=3\\f(3,2)=f(2,f(3,1))=f(2,3)=4\\f(3,3)=f(2,f(3,2))=f(2,4)=1\\f(3,4)=f(2,f(3,3))=f(2,1)=0\end{cases}$　$\begin{cases}f(4,0)=f(3,1)=3\\f(4,1)=f(3,f(4,0))=f(3,3)=1\\f(4,2)=f(3,f(4,1))=f(3,1)=3\\f(4,3)=f(3,f(4,2))=f(3,3)=1\\f(4,4)=f(3,f(4,3))=f(3,1)=3\end{cases}$

$$\begin{cases} f(5,0)=f(4,1)=1 \\ f(5,1)=f(4,f(5,0))=f(4,1)=1 \\ f(5,2)=f(4,f(5,1))=f(4,1)=1 \\ f(5,3)=f(4,f(5,2))=f(4,1)=1 \\ f(5,4)=f(4,f(5,3))=f(4,1)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} f(6,0)=f(5,1)=1 \\ f(6,1)=f(5,f(6,0))=f(5,1)=1 \\ f(6,2)=f(5,f(6,1))=f(5,1)=1 \\ f(6,3)=f(5,f(6,2))=f(5,1)=1 \\ f(6,4)=f(5,f(6,3))=f(5,1)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(7,0)=f(6,1)=1 \\ f(7,1)=f(6,f(7,0))=f(6,1)=1 \\ f(7,2)=f(6,f(7,1))=f(6,1)=1 \\ f(7,3)=f(6,f(7,2))=f(6,1)=1 \\ f(7,4)=f(6,f(7,3))=f(6,1)=1 \end{cases}$$ （不再改變）

21. 安逸貓與猛衝狗要走上有若干階梯的樓梯，可是牠們不祇一次走1個階梯，而是用跳躍方式上樓梯。安逸貓每一次跳躍2個階梯（可是如有需要，牠在最後可以祇跳一個階梯），猛衝狗每一次跳躍5個階梯（可是如有需要，當剩下階梯少於5個時，牠將只跳躍最後剩下的階梯）。假定猛衝狗抵達樓梯頂端時跳躍的次數比安逸貓跳躍的次數少19次。令s表示此樓梯所有可能階梯數之和，則s的各位數字之和爲多少？
(A)9　(B)11　(C)12　(D)13　(E)15。　【104AMC12B】

答：(D)

解：可能階梯數$2(t+19)+0=5t+0$，$t\in N\Rightarrow$不合

或$2(t+19)+0=5(t-1)+\begin{cases}1\\4\end{cases}$，$t\in N\Rightarrow t=\begin{cases}14\\13\end{cases}$　此時階梯數爲66或64

或$2(t+19)+1=5(t+1)+0$，$t\in N\Rightarrow$不合

或$2(t+19)+1=5t+3$，$t\in N\Rightarrow t=12$　此時階梯數爲63

$s=66+64+63=193$，故各位數字和爲13

22. 六張椅子等距圍繞著一個圓桌，每張椅子坐一個人，每一個人站起來然後重新坐上一張椅子，所坐的該張椅子不是原先的椅子也不相鄰原先的椅子。請問有多少方式可以完成這樣的坐法？
(A)14　(B)16　(C)18　(D)20　(E)24。　【104AMC12B】

答：(D)

解：允許的可能位置：

-	-	A	A	A	-
-	-	-	B	B	B
C	-	-	-	C	C
D	D	-	-	-	D
E	E	E	-	-	-
-	F	F	F	-	-

可能的組合（共20組）：

C	D	E	F	A	B
C	F	E	B	A	D
C	E	F	B	A	D
C	F	E	A	B	D
C	E	F	A	B	D
C	E	A	F	B	D

D	F	E	A	C	B
D	E	F	A	C	B
D	E	A	F	C	B
D	F	E	B	A	C
D	E	F	B	A	C
D	F	E	A	B	C

D	E	F	A	B	C
D	E	A	F	B	C
E	D	F	A	C	B
E	D	A	F	C	B
E	D	F	B	A	C
E	D	F	A	B	C

E	D	A	F	B	C
E	F	A	B	C	D

$\boxed{解}$：$\begin{vmatrix} 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&1\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 0&0&1&1&1\\ 1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1&0&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&1&0&0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1&0&0&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&1&1&0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&1&1&0 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1&0&0&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0\\ 0&1&1&0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 1&1&1&0\\ 0&1&1&0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1&0&0&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0\\ 0&1&1&0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 1&1&1&0\\ 0&1&1&1 \end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{vmatrix} 1&0&1\\ 1&0&0\\ 1&0&0 \end{vmatrix}}_{0\text{ 項}}+\underbrace{\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 1&1&0\\ 0&1&0 \end{vmatrix}}_{1\text{ 項}}-\underbrace{\begin{vmatrix} 1&1&0\\ 1&1&0\\ 0&1&0 \end{vmatrix}}_{0\text{ 項}}-\underbrace{\begin{vmatrix} 1&0&1\\ 1&0&0\\ 1&1&0 \end{vmatrix}}_{1\text{ 項}}+\underbrace{\begin{vmatrix} 1&1&0\\ 1&1&0\\ 0&1&1 \end{vmatrix}}_{2\text{ 項}}$$

$$+\underbrace{\begin{vmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 1&1&0 \end{vmatrix}}_{0\text{ 項}}-\underbrace{\begin{vmatrix} 1&1&0\\ 1&1&0\\ 0&1&1 \end{vmatrix}}_{2\text{ 項}}+\underbrace{\begin{vmatrix} 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&1&0 \end{vmatrix}}_{2\text{ 項}}-\underbrace{\begin{vmatrix} 1&1&0\\ 1&1&1\\ 0&1&1 \end{vmatrix}}_{3\text{ 項}}-\underbrace{\begin{vmatrix} 1&0&0\\ 1&1&0\\ 1&1&0 \end{vmatrix}}_{0\text{ 項}}$$

$$-\underbrace{\begin{vmatrix} 1&1&0\\ 1&1&1\\ 0&1&1 \end{vmatrix}}_{3\text{ 項}}-\underbrace{\begin{vmatrix} 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&1&0 \end{vmatrix}}_{2\text{ 項}}+\underbrace{\begin{vmatrix} 1&1&0\\ 1&1&1\\ 0&1&1 \end{vmatrix}}_{3\text{ 項}}+\underbrace{\begin{vmatrix} 1&0&0\\ 1&1&0\\ 1&1&1 \end{vmatrix}}_{1\text{ 項}}\text{，共 20 項}$$

23. 一長方形盒子的體積是 $a\times b\times c$，其中 a、b、c 都是整數且 $1\le a\le b\le c$。盒子的體積與表面積之數值相等，則有多少個可能的三元序組 (a,b,c)？
(A) 4　(B) 10　(C) 12　(D) 21　(E) 26。　【104AMC12B】

$\boxed{答}$：(B)

$\boxed{解}$：$abc=2(ab+bc+ca)\xrightarrow{\text{同}\div 2abc}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$，$a$、$b$、$c\in N$

故 $(a,b,c)=(3,7,42)$，$(3,8,24)$，$(3,9,18)$，$(3,10,15)$，$(3,12,12)$，
$(4,5,20)$，$(4,6,12)$，$(4,8,8)$，$(5,5,10)$，$(6,6,6)$

24. 有四個圓彼此互不全等，圓心分別爲 A、B、C、D，且點 P 與 Q 同時都在這四個圓上。圓 A 的半徑長是圓 B 半徑長的 $\frac{5}{8}$，且圓 C 的半徑長是圓 D 半徑長的 $\frac{5}{8}$。還有，$\overline{AB}=\overline{CD}=39$ 且 $\overline{PQ}=48$。設 R 爲 $\overline{PQ}$ 線段的中點，則 $\overline{AR}+\overline{BR}+\overline{CR}+\overline{DR}=$

(A)180 (B)184 (C)188 (D)192 (E)196。 【104AMC12B】

答：(D)

解：爲了符合四個圓彼此互不全等，令 A、B 必在公弦 $\overline{PQ}$ 異側，C、D 必在公弦 $\overline{PQ}$ 同側

圓 A 的半徑長 $5t$、圓 B 半徑長 $8t$、$\overline{AR}=d$、$\overline{BR}=39-d$、$\overline{QR}=\overline{PR}=24$

$$\left\{\begin{array}{l} 24^2+d^2=25t^2 \\ 24^2+(39-d)^2=64t^2 \end{array}\right. \Rightarrow 39^2-78d=39t^2 \Rightarrow 39-2d=t^2$$

$$\Rightarrow 24^2+d^2=25(39-2d) \Rightarrow d^2+50d-399=0 \Rightarrow d=7 \text{ 或 } -57 \text{（不合）}$$

圓 C 的半徑長 $5s$、圓 D 半徑長 $8s$、$\overline{CR}=e$、$\overline{DR}=39+e$、$\overline{QR}=\overline{PR}=24$

$$\left\{\begin{array}{l} 24^2+e^2=25s^2 \\ 24^2+(39+e)^2=64s^2 \end{array}\right. \Rightarrow 39^2+78e=39s^2 \Rightarrow 39+2e=s^2$$

$$\Rightarrow 24^2+e^2=25(39+2e) \Rightarrow e^2-50e-399=0 \Rightarrow e=57 \text{ 或 } -7 \text{（不合）}$$

則 $\overline{AR}+\overline{BR}+\overline{CR}+\overline{DR}=7+32+57+96=192$

25. 一隻螞蟻從 P_0 點開始爬行，牠先向東爬行1吋到達 P_1 點，對 $j\ge 1$，每當這隻螞蟻到達 P_j 點時，牠接著以反時針方向轉 30° 直行 $j+1$ 吋到達 P_{j+1} 點。當這隻螞蟻到達 P_{2015} 點時，牠正好與 P_0 點相距 $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ 吋，其中 a、b、c、d 爲正整數且 b 與 d 不能被任何質數的平方整除，請問 $a+b+c+d$ 爲何？

(A) 2016 (B) 2024 (C) 2032 (D) 2040 (E) 2048。 【104AMC12B】

答：(B)

解：x 座標：
$$\left\{\begin{array}{l}
(1+13+25+\cdots+2005)\cos 30^\circ \\
+(2+14+26+\cdots+2006)\cos 60^\circ \\
+(3+15+27+\cdots+2007)\cos 90^\circ \\
+(4+16+28+\cdots+2008)\cos 120^\circ \\
+(5+17+29+\cdots+2009)\cos 150^\circ \\
+(6+18+30+\cdots+2010)\cos 180^\circ \\
+(7+19+31+\cdots+2011)\cos 210^\circ \\
+(8+20+32+\cdots+2012)\cos 240^\circ \\
+(9+21+33+\cdots+2013)\cos 270^\circ \\
+(10+22+34+\cdots+2014)\cos 300^\circ \\
+(11+23+35+\cdots+2015)\cos 330^\circ \\
+(12+24+36+\cdots+2004)\cos 360^\circ
\end{array}\right.
=\left\{\begin{array}{l}
(6\times 168)\times\frac{-\sqrt{3}}{2} \\
+(6\times 168)\times\frac{-1}{2} \\
+(6\times 168)\times\frac{1}{2} \\
+(6\times 168)\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\
(6\times 167-2010)\times 1
\end{array}\right.
=-1008$$

$$
y\text{ 座標：}\begin{cases}
(1+13+25+\cdots+2005)\sin 30^\circ \\
+(2+14+26+\cdots+2006)\sin 60^\circ \\
+(3+15+27+\cdots+2007)\sin 90^\circ \\
+(4+16+28+\cdots+2008)\sin 120^\circ \\
+(5+17+29+\cdots+2009)\sin 150^\circ \\
+(6+18+30+\cdots+2010)\sin 180^\circ \\
+(7+19+31+\cdots+2011)\sin 210^\circ \\
+(8+20+32+\cdots+2012)\sin 240^\circ \\
+(9+21+33+\cdots+2013)\sin 270^\circ \\
+(10+22+34+\cdots+2014)\sin 300^\circ \\
+(11+23+35+\cdots+2015)\sin 330^\circ \\
+(12+24+36+\cdots+2004)\sin 360^\circ
\end{cases}
=\begin{cases}
(6\times 168)\times \dfrac{-1}{2} \\
+(6\times 168)\times \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\
+(6\times 168)\times(-1) \\
+(6\times 168)\times \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\
+(6\times 168)\times \dfrac{-1}{2}
\end{cases}
=-2016-1008\sqrt{3}
$$

$$
d(P_{2015},P_0)=\sqrt{(-1008)^2+\left(-2016-1008\sqrt{3}\right)^2}=1008\sqrt{(-1)^2+\left(-2-\sqrt{3}\right)^2}
$$

$$
=1008\sqrt{8+2\sqrt{12}}=1008\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)=1008\sqrt{6}+1008\sqrt{2}
$$

$$
a+b+c+d=1008+6+1008+2=2024
$$