我有 95%信心說 98 學測數學第 9 題得分了嗎？

第一處　朱惠文

今年學測數學試題出現評量信賴區間與信心水準的試題，考後各界對此題的第一印象是「太難！可能是大學統計才會學到的知識或概念」。本題是否超出學科能力測驗（以下簡稱學測）的範圍或是課程綱要，大學入學考試中心（以下簡稱大考中心）對此有詳盡的說明，並於 98 年 2 月 12 日至 98 年 3 月 12 日公佈於大考中心網站[1]。但是這一題較難，是不爭的事實，原因可能是此題所屬單元「信賴區間與信心水準的解讀」，為九五課程綱要[2]新增的內容，而分析考後問卷結果，有些高中教師認為學生對 95%信賴區間的意義並不了解，有些考生認為 95%信賴區間就是 95%的機率，也有些考生認為 95%信賴區間的意義是指甲地聽過某項產品的居民佔全體居民的百分比 p 落在抽樣一次所得信賴區間的機率是 95%。這些均顯示了教師或考生對此概念的理解不像其他單元那麼清晰。本文嘗試從此試題所欲評量之概念說明信賴區間與信心水準的意義，並解釋學生誤答此試題的原因，若對此單元仍有不夠瞭解之處，可參考高中課本與統計相關書籍，亦可上學科中心網站查詢關於信賴區間與信心水準的文章。

題目：

某廠商委託民調機構在甲、乙兩地調查聽過某項產品的居民佔當地居民之百分比(以下簡稱為「知名度」)。結果如下：在 95% 信心水準之下，該產品在甲、乙兩地的知名度之信賴區間分別為 [0.50 , 0.58]、[0.08 , 0.16]。試問下列哪些選項是正確的？

(1)甲地本次的參訪者中，54% 的人聽過該產品

(2)此次民調在乙地的參訪人數少於在甲地的參訪人數

(3)此次調查結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於 95%

(4)若在乙地以同樣方式進行多次民調，所得知名度有 95% 的機會落在區間[0.08 , 0.16]

(5)經密集廣告宣傳後，在乙地再次進行民調，並增加參訪人數達原人數的四倍，則在 95% 信心水準之下該產品的知名度之信賴區間寬度會減半(即 0.04)

[1] 大考中心網站www.ceec.edu.tw最新訊息中的「98 學科能力測驗試題疑義回覆內容」

[2] 各年度的課程綱要請參照教育部中等教育司網站。http://www.edu.tw/high-school/content.aspx

此題出自 98 學測數學考科第 9 題。選項(1)、選項(2)與選項(5)可參考試卷背後所附公式，經過分數與小數的運算與估計來判斷各選項的正確與否。例如選項(1)由公式「95%信心水準下之信賴區間：$\left[\hat{p}-2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$」，推得甲、乙兩地此次抽樣居民中聽過該產品者佔總抽樣居民中的百分比分別為 $\hat{p}_{甲}=0.54$ 與 $\hat{p}_{乙}=0.12$ 。

選項(3)與選項(4)則評量信心水準的意義與信賴區間的概念。根據考後大考中心收到考生、教師、家長或其他社會人士對此題的疑義，以及參考考生於問卷所寫關於此題的作答思緒，可分成以下兩個處理選項(3)不同的解題論點，且這兩個論點所得的答案是不一樣的。

論點 A：除非對每一位居民均進行調查，否則並不知道甲地聽過該產品的居民佔全體居民的百分比 p 的值是多少，但 p 是一個定數，即甲地全體居民中聽過該項產品的人數是一個不變的數，且是一個未知的定數。既然 p 是一個定數，當問 p 是否在某一個固定的區間時，則結果只有兩個：即 p 在這個區間，或不在這個區間；故「選項(3)：此次調查結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於95%」，即問 $p>0.5$ 的機率是否大於 95%，此選項的敘述當然是錯誤的，因為 p 是一個定數，故 p 若大於 0.5，就不會小於 0.5，採機率的語言說的話，$p>0.5$ 的機率不是 1 就是 0，故選項(3)是錯誤的。

論點 B：「95%的信心水準下所得的信賴區間」的意義指的是每抽樣一次，均會得到一個抽樣居民中聽過該產品者佔總抽樣居民中的百分比 $\hat{p}$ 與信賴區間，抽樣足夠多次後，有 95%的信賴區間會包含 p ，用機率的語言，即

$$P\left(p\in\left[\hat{p}-2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]\right)=0.95 \qquad (一)$$

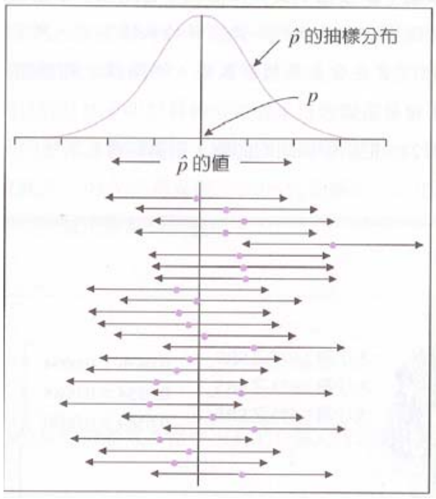
根據以上敘述與題意「在 95%的信心水準之下，該產品在甲、乙地知名度的信賴區間分別為[0.50,0.58]、[0.08,0.16]」，可推得甲地全體居民中聽過某項產品者佔當地全體居民之百分比 p 落在 0.50 和 0.58 間的機率是 95%，用機率的語言來說，即 $P(p\in[0.50,0.58])=0.95$，故可推得 $p>0.50$ 的機率會大於 95%，得選項(3)是正確的。

欲討論這兩個論點何者正確，需先討論何謂信賴區間。在此嘗試以一生活中的遊戲說明信賴區間與信心水準的涵意。台灣夜市常見一種套環的遊戲（如圖一），老闆會提供玩家幾個環，玩家可選擇一個目標，例如圖中的小熊玩偶，用這幾個環來套這個小熊玩偶，只要小熊玩偶在這個環裡面，不管是在這個環的正中間，或是靠近環的右邊，都可以拿到這個小熊玩偶，但是若小熊玩偶不在環裡面，就不能得到小熊玩偶了。抽樣一次，就好像丟一個環，這次抽樣所

圖一

得的信賴區間，就是這個環的區域，如果這一個環套到小熊玩偶，表示這次抽樣所得的信賴區間包含真正的 p ，但也有可能這一個環沒有套到小熊玩偶，即這次抽樣所得的信賴區間並沒有包含真正的 p。丟環之前，小熊玩偶的位置並不會改變，就像真正的 p 是個定值，丟過之後，環是否有套住小熊玩偶，已經是個確定的事實。但若投擲足夠多次，大約有 95%個環會套住小熊玩偶，這就是 95%信心水準的意義，但並不是說每投一個環，有 95%的機率套住了小熊玩偶，或說小熊玩偶落在這個環內的機率是 95%。如果讀者有興趣，可參考 Howell(2007) Statistical Method for Psychology 6th edition 中對信心水準的說明。

現在來說明論點 A 與論點 B 何者正確，假設甲地的總人口數為 10,000 人， p 為甲地全體居民中聽過某項產品者佔當地全體居民之百分比。當使用簡單隨機抽樣由其中選出 130 位參訪者時，會有 C_{130}^{10000} 種簡單隨機抽樣，而每種的機率都是 $\dfrac{1}{C_{130}^{10000}}$ ，當詢問每種抽樣選出的 130 位參訪者，可求得聽過該產品者佔 130 位參訪者的比例，則該比例的值（即 $\hat{p}$ ）可能是 $\dfrac{0}{130}$ 、 $\dfrac{1}{130}$ 、…、 $\dfrac{130}{130}$ ，再根據該比例的值得出其信賴區間，最多會有 131 類。每個值（信賴區間）發生的機率均可以 $\hat{p}$ 表示，例如 $\hat{p}=\dfrac{1}{130}$ 的機率為 $\dfrac{C_1^{p\times 10000}+C_{129}^{(1-p)\times 10000}}{C_{130}^{10000}}$ 。此題所謂「95%信心水準之下信賴區間」指的是這 C_{130}^{10000} 種簡單隨機抽樣所得出的信賴區間中大約有 95%的區間會包括未知的定數 p ，即式(一)。但式(一)中的 $\hat{p}$ 是一個隨機的量，而[0.50,0.58]是某個抽樣所得的信賴區間，為這 C_{130}^{10000} 個信賴區間中的一個，此區間可能包含未知的 p ，亦可能不包含 p ，雖然我們不知道究竟包含抑或不包含，但總是一確定事實。用機率的語言來說，即 $P(p\in[0.50,0.58])=1$ 或 0 ，這是使用「信心」一辭的原因，就像前述遊戲中每丟一個環，這個環可能套住小熊玩偶，亦可能沒套住小熊玩偶。因此在解讀信賴區間時，會以「由此次抽樣結果，有 95%的信心說 p 會落在區間[0.50,0.58]」說明，但由此說明不能進一步推論 p 落在區間[0.50,0.58]的機率是 95%，即信心不是機率（數學科學科中心電子報精選輯，2008.7.15）。簡而言之，抽樣足夠多次後，可以得出約 95%的信賴區間會包括未知的定數 p ，抽樣完成後， p 值是否落在所得的區間中，是個已確定的事實（雖然在未做普查的情形下，謎底尚未揭曉），不是機率問題。因此論點 A 所得的結論是正確的，論點 B 的觀念是錯誤的。事實上，由圖二亦可以看出，若我們知道真正的 p 是多少，則抽樣足夠多次後，有 95%個 $\hat{p}$ 會落在區間 $\left[p-2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}},p+2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$ ，但是未對全體居民進行普查前，我們並不知道真正的 p 值。依此判斷選項(4)，除非真正的 p 值為 0.12，才會有 95%個抽樣所得的 $\hat{p}$ 會落在區間 $[0.08,0.16]$ 。



圖二：取自「統計學的世界」的 21 章圖 21.4

本題所用的解題概念涉及小數乘法運算與分數大小的比較，以及 95%信賴區間的涵意。而信賴區間背後的數學知識含常態分佈與中央極限定理，即每次抽樣所得的 $\hat{p}$ 值會隨著樣本而變，每一次抽樣之前，都不可能預知結果；然而長期下來，如果我們把所有的值放在一起考慮的話（比如說畫一個直方圖），它會有很清楚的型態，用常態曲線可以把這個型態描繪得相當接近（數學科學科中心電子報，2008.7.18）。這些定理在高中課程中並不容易說得清楚，因此高中數學課程綱要第二學年對此單元的說明為「常態分配及 68-95-99.7 規律。僅需處理二元資料，不必引進機率模型，以教學活動了解信賴區間與信心水準的解讀。」其實施方法為「機率與統計(I)新增信賴區間與信心水準的解讀一節，其相關的教學活動建議由全班每一位同學各自以亂數表模擬丟銅板的過程，代入銅板正面機率信賴區間的算式 $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ 來得到各自所得的信賴區間，並察覺大多數同學所得的信賴區間會涵蓋銅板正面機率的真實值。」依此，學生可以經由實際模擬的過程中，發現有些同學所得的信賴區間會包含銅板正面機率的真實值 0.5，有些則不會包含。想了解信心水準與信賴區間的意義，不一定需要用到中央極限定理來證明。以圖二為例，其中共有 25 條線段，每條線段代表一個抽樣的信賴區間，圓點代表調查樣本的比率 $\hat{p}$ ，有某些線段並不包含 p 。

近年來，報章雜誌處處可見民調結果的解讀與應用，例如選舉候選人的得票率、產品滿意度調查、電視節目的收視率調查等等，而這些結果的解讀往往影響了政府的決策與人民的判斷。但這些結果的說明通常僅有「在 95%的信心水準之下，所得的信賴區間」，其背後所包含的知識與涵意，並沒有隨著結果的解讀而有所說明，亦因此，常會聽到「民調預測不準」的聲音。如果了解信賴區間與信心水準的意義，所謂民調預測不準的原因其實是沒有真正理解「信心水準」的涵意。本文嘗試從 98 學測第 9 題出發，說明信心水準與

信賴區間的涵意，其中未詳述的相關定理，例如常態分佈與中央極限定理等，可以參照統計相關書籍或學科中心網站。

參 考 文 獻 ：

1. 信賴區間與信心水準的解讀關之機率與統計知識，陳宏著，數學科學科中心電子報精選輯，數學科學科中心教學資源庫 http://lib.ck.tp.edu.tw/Resources/Anonymous/Resource.aspx。
2. 甚麼是信賴區間，鄭惟厚著，數學科學科中心電子報第 5 期，數學科學科中心教學資源庫http://lib.ck.tp.edu.tw/Resources/Anonymous/Resource.aspx。
3. 統計學的世界，墨爾著，鄭惟厚譯，民 91，天下遠見出版公司。