2015 第 16 屆 AMC10A 試題暨詳解

俞克斌老師　編授

1. 算出$\left(2^0-1+5^2+0\right)^{-1}\times 5$之值為何？

(A) -125　(B) -120　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{5}{24}$　(E) 25。　【2015AMC10A】

答：(C)

解：所求$=\left(1-1+25+0\right)^{-1}\times 5=\frac{1}{25}\times 5=\frac{1}{5}$

2. 盒中裝有三角形與正方形的紙片，若盒中總共有25張紙片，且這些紙片總共有84條邊，則盒中有多少張正方形紙片？

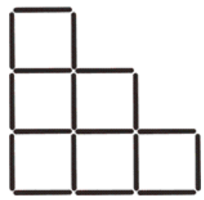
(A) 3　(B) 5　(C) 7　(D) 9　(E) 11。　【2015AMC10A】

答：(D)

解：$\begin{cases} x+y=25 \\ 3x+4y=84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\left(\text{三角形}\right)=16 \\ y\left(\text{正方形}\right)=9 \end{cases}$

3. 小安用18根牙籤排出一個3階的樓梯，如圖所示，試問小安還要多加幾根牙籤才能排出一個5階的樓梯？

(A) 9　(B) 18　(C) 20　(D) 22　(E) 24。　【2015AMC10A】



答：(D)

解：$a_1=4$，$a_2=10$，$a_3=18$，$a_4=28$，$a_5=40$

4. 小寶、小妃與小美在某次歡樂派對中各得到一些糖球，小寶的糖球數是小妃的三倍，小妃的糖球數是小美的兩倍。小寶決定將他的糖球分一些給小妃與小美，使得他們三個人的糖球數都一樣多，試問小寶需將他糖球數的幾分之幾給小妃？

(A) $\frac{1}{12}$　(B) $\frac{1}{6}$　(C) $\frac{1}{4}$　(D) $\frac{1}{3}$　(E) $\frac{1}{2}$。　【2015AMC10A】

答：(B)

解：不妨令小美原有x，小妃原有$2x$，小寶原有$6x$
最終小美、小妃、小寶均有$3x$，可見小寶分給小美$2x$，分給小妃x

5. 巴老師教一班15位學生的數學，當他改完考卷時，發現不含培頓考卷，該班平均成績是80分；而含培頓考卷後，該班的平均成績是81分，試問培頓成績是幾分？

(A) 81　(B) 85　(C) 91　(D) 94　(E) 95。　【2015AMC10A】

答：(E)

解：$\frac{80\times 14+x}{14+1}=81 \Rightarrow x=95$

6. 兩個正整數的和等於這兩數之差的5倍，試問大數對小數的比值為多少？

(A) $\frac{5}{4}$　(B) $\frac{3}{2}$　(C) $\frac{9}{5}$　(D) 2　(E) $\frac{5}{2}$。　【2015AMC10A】

答：(B)

解：$x+y=5(x-y)\xrightarrow{x,y\in N}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$

7. 等差數列13，16，19，……，70，73總共有多少項？
(A) 20　(B) 21　(C) 24　(D) 60　(E) 61。【2015AMC10A】

答：(B)

解：$73=13+(n-1)\times 3\ \Rightarrow\ n=21$

8. 兩年前小培是他表弟年齡的三倍，而再更早兩年小培是他表弟年齡的四倍，試問多少年後他們的年齡的比是2：1？
(A) 2　(B) 4　(C) 5　(D) 6　(E) 8。【2015AMC10A】

答：(B)

解：$\begin{cases}(x-2)=3(y-2)\\(x-4)=4(y-4)\\(x+t)=2(y+t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=20\\y=8\\t=4\end{cases}$

9. 兩個直圓柱的體積相同，若第二個直圓柱的半徑較第一個直圓柱的半徑多第一個直圓柱半徑的10%，則兩個直圓柱高的關係爲下列何者？
(A) 第二個直圓柱的高較第一個直圓柱的高少第一個直圓柱高的10%
(B) 第一個直圓柱的高較第二個直圓柱的高多第二個直圓柱高的10%
(C) 第二個直圓柱的高較第一個直圓柱的高少第一個直圓柱高的21%
(D) 第一個直圓柱的高較第二個直圓柱的高多第二個直圓柱高的21%
(E) 第二個直圓柱的高是第一個直圓柱高的80%。【2015AMC10A】

答：(D)

解：$\pi\times r^2\times h_1=\pi(1.1r)^2\times h_2\ \Rightarrow\ h_1=1.21h_2$

10. 將四個字母$abcd$重新排列，但原來相鄰的字母都不能再排相鄰（例如：ab或ba都不能出現在重新的排列中），試問共有幾種排法？
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　(E) 4。【2015AMC10A】

答：(C)

解：$\left.\begin{array}{cccc}\boxed{abcd} & bacd & cabd & dabc\\ abdc & badc & cadb & dacb\\ acbd & bcad & cbad & dbac\\ acdb & bcda & cbda & dbca\\ adbc & bdac & cdab & dcab\\ adcb & bdca & cdba & dcba\end{array}\right\}$ 符合題意者僅兩種

11. 某個長方形長與寬的比爲4：3，若此長方形對角線的長爲d，且其面積等於kd^2，則k之值爲何？
(A) $\dfrac{2}{7}$　(B) $\dfrac{3}{7}$　(C) $\dfrac{12}{25}$　(D) $\dfrac{16}{25}$　(E) $\dfrac{3}{4}$。【2015AMC10A】

答：(C)

解：長$4t$，寬$3t$，對角線$d=5t$

面積$=kd^2=4t\times 3t \Rightarrow k=\dfrac{12t^2}{d^2}=\dfrac{12t^2}{25t^2}=\dfrac{12}{25}$

12.若點$\left(\sqrt{\pi},a\right)$與點$\left(\sqrt{\pi},b\right)$爲$y^2+x^4=2x^2y+1$圖形上相異的兩點，則$\left|a-b\right|=$？

(A)1 (B)$\dfrac{\pi}{2}$ (C)2 (D)$\sqrt{1+\pi}$ (E)$1+\sqrt{\pi}$。 【2015AMC10A】

答：(C)

解：$y^2-2\pi y+\left(\pi^2-1\right)=0$有兩根$a$、$b$

$\left|a-b\right|=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{(2\pi)^2-4\left(\pi^2-1\right)}=2$

13.小華有12枚硬幣，這些都是5元或10元的硬幣，若用至少一枚硬幣的情形下，這些硬幣恰可組合成17種不同的金額，則小華有多少枚10元的硬幣？

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6 (E)7。 【2015AMC10A】

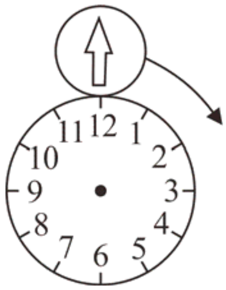
答：(C)

解：10元x枚、5元$(12-x)$枚

最多可表$10x+5(12-x)=5x+60$（元）$=\underbrace{17\times 5}_{17\text{種不同金額}}$（元） $\therefore x=5$

14.如圖所示，有一個半徑爲20公分的圓形鐘面，且有一個半徑爲10公分的圓盤與鐘面外切於12點的地方，圓盤上畫有一個箭頭，開始時箭頭的指向是垂直向上，將圓盤沿著鐘面的外沿依順時針方向滾動，試問當圓盤上的箭頭下一次垂直向上時，圓盤與鐘面相切於何處？

(A)2點鐘 (B)3點鐘 (C)4點鐘 (D)6點鐘 (E)8點鐘。 【2015AMC10A】



答：(C)

解：圓盤中心到鐘面圓心距離爲$20+10=30$

故圓盤繞鏡面滾回原處時，箭頭共有3次指向正上方，第一次爲$\dfrac{1}{3}$圈（$4:00$）處

15.考慮由分數$\dfrac{x}{y}$組成的集合，其中x與y是互質的正整數，試問在此集合中有多少個分數滿足：當分子與分母各加1時，新分數比原來的分數增加了10%？

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)無限多。 【2015AMC10A】

答：(B)

解：$\dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{x}{y}\times 1.1 \Rightarrow xy+11x-10y=0$

$\Rightarrow (x-10)(y+11)=-110$，其中$x,y\in N$，故$x-10>-10$，$y+11>11$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x-10 & -5 & -2 & -1 \\ \hline y+11 & 22 & 55 & 110 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 5 & 12 & 9 \\ \hline y & 11 & 44 & 99 \end{array} \xrightarrow{(x,y)=1} \begin{array}{c|c} x & 5 \\ \hline y & 11 \end{array}$$

16.若$y+4=(x-2)^2$，$x+4=(y-2)^2$，且$x\neq y$，則$x^2+y^2=$？

(A)10 (B)15 (C)20 (D)25 (E)30。 【2015AMC10A】

答：(B)

解：$\begin{cases} y+4=(x-2)^2 \\ x+4=(y-2)^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{相減}} y-x=(x-y)(x+y-4) \Rightarrow x+y=3$

代回原式 $\Rightarrow 3-x+4=(x-2)^2 \Rightarrow x^2-3x=3$

所求$=x^2+(3-x)^2=2x^2-6x+9=6+9=15$

17. 某直線通過原點，且與兩直線 $x=1$ 及 $y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 相交，若這三條直線圍出一個正三角形，則此正三角形的周長是多少？

(A) $2\sqrt{6}$ (B) $2+2\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $3+2\sqrt{3}$ (E) $6+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。【2015AMC10A】

答：(D)

解：$x=1$ 與 $y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 之銳角平分線斜率爲 $\sqrt{3}$，故過原點之第三線爲 $x+\sqrt{3}y=0$

正 Δ 兩頂點 $\left(1,1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，正 Δ 邊長爲 $1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，周長爲 $3+2\sqrt{3}$

18. 十六進位法（以16爲底）是用數碼0至9及用字母 A 至 F 分別代表10至15來表示任何正整數（例如：$(3B2)_{16}=3\times16^2+11\times16+2=946$）。設在前1000個正整數中，恰有 n 個數的十六進位表示法中只含數碼，試問 n 的所有位數（以10爲底）的數字和爲多少？

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21。【2015AMC10A】

答：(E)

解：$\because (1000)_{10}=3\times16^2+14\times16+8=(3E8)_{16}$

故符合題意之樣本 $p\times16^2+q\times16+r$

$n=\underbrace{4}_{p=0,1,2,3}\times\underbrace{10}_{q=0\sim9}\times\underbrace{10}_{r=0\sim9}-\underbrace{1}_{p=q=r=0}=399$ 種

故 n 的所有位數（以10爲底）的數字和$=3+9+9=21$

19. 等腰直角 ΔABC 中，$\angle ACB$ 爲直角且面積爲12.5，若 $\angle ACB$ 的三等分角線分別交 $\overline{AB}$ 於 D、E 兩點，則 ΔCDE 的面積是多少？

(A) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{50\sqrt{3}-75}{4}$ (C) $\dfrac{15\sqrt{3}}{8}$ (D) $\dfrac{50-25\sqrt{3}}{2}$ (E) $\dfrac{25}{6}$。【2015AMC10A】

答：(D)

解：$\overline{CA}=\overline{CB}=x \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}=12.5 \Rightarrow x=5$

$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{CD}\times\sin30^\circ+\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{CD}\times\sin60^\circ=\dfrac{25}{2} \Rightarrow \overline{CD}=\dfrac{10}{\sqrt{3}+1}$

$\Delta CDE=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{10}{\sqrt{3}+1}\right)^2\times\sin30^\circ=\dfrac{50-25\sqrt{3}}{2}$

20. 某長方形的面積爲 $A\,cm^2$，且周長爲 $P\,cm$，其中 A 與 P 均爲正整數，下列哪一個數<u>不可能</u>等於 $A+P$？
(A)100　(B)102　(C)104　(D)106　(E)108。【2015AMC10A】

$\boxed{答}$：(B)

$\boxed{解}$：長 x，寬 y $\Rightarrow \begin{cases} xy=A \\ 2(x+y)=P \end{cases}$，$A,P\in N$

$A+P=xy+2x+2y=(x+2)(y+2)-4$。逐一檢測，僅(B)不合

21. 四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{AC}=3$、$\overline{BC}=4$、$\overline{BD}=4$、$\overline{AD}=3$，且 $\overline{CD}=\dfrac{12}{5}\sqrt{2}$，試問此四面體的體積爲多少？
(A) $3\sqrt{2}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) $\dfrac{24}{5}$　(D) $3\sqrt{3}$　(E) $\dfrac{24}{5}\sqrt{2}$。【2015AMC10A】

$\boxed{答}$：(C)

$\boxed{解}$：取 $\overline{AB}$ 上點 H，使 $\angle AHC=\angle AHD=90^\circ \Rightarrow \overline{CH}=\overline{DH}=\dfrac{12}{5}$

又 $\overline{CD}=\dfrac{12}{5}\sqrt{2}$，故 ΔCDH 面積 $=\left(\dfrac{12}{5}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{72}{25}$

故四面體體積 $=\dfrac{72}{25}\times 5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{24}{5}$

22. 八個人圍一圓桌而坐，每人都握有一枚公正的硬幣，八個人都投擲硬幣後，若出現正面則站起來，若出現反面則仍坐著，試問沒有相鄰的兩人都是站立的機率爲多少？
(A) $\dfrac{47}{256}$　(B) $\dfrac{3}{16}$　(C) $\dfrac{49}{256}$　(D) $\dfrac{25}{128}$　(E) $\dfrac{51}{256}$。【2015AMC10A】

$\boxed{答}$：(A)

$\boxed{解}$：樣本空間 $=2^8=256$

$$事件=\underbrace{1}_{\substack{無人\\站立}}+\underbrace{8}_{\substack{1人\\站立}}+\underbrace{\left(C_2^8-\underbrace{8}_{2人相連}\right)}_{2人站立}+\underbrace{\left(C_3^8-\underbrace{8}_{3人相連}-\underbrace{8}_{2人相連}\times\underbrace{4}_{另1人}\right)}_{3人站立}+\underbrace{2}_{\substack{4人\\站立}}=47$$

機率 $=\dfrac{47}{256}$

23. 求滿足方程式 $x^2-ax+2a=0$ 的解均爲整數的所有可能 a 之和爲多少？
(A)7　(B)8　(C)16　(D)17　(E)18。【2015AMC10A】

$\boxed{答}$：(C)

$\boxed{解}$：$\alpha+\beta=a$ 且 $\alpha\beta=2a \Rightarrow \alpha\beta-2(\alpha+\beta)=0 \Rightarrow (\alpha-2)(\beta-2)=4$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccccc} \alpha-2 & 1 & 2 & 4 & -1 & -2 & -4 \\ \hline \beta-2 & 4 & 2 & 1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \Rightarrow \alpha+\beta-4=5 或 4 或 -5 或 -4$$

$\Rightarrow a-4=5$ 或 4 或 -5 或 -4 $\Rightarrow a=9$ 或 8 或 -1 或 0 $\Rightarrow$ 總和爲16

24. 對於某些正整數 p，存在四邊形 $ABCD$ 滿足各邊的邊長均爲正整數，周長爲 p，$\angle B$ 與 $\angle C$ 均爲直角，$\overline{AB}=2$，且 $\overline{CD}=\overline{AD}$，試問有多少個不同的 $p<2015$？

(A) 30　(B) 31　(C) 61　(D) 62　(E) 63。【2015AMC10A】

答：(B)

解：$\overline{AD}=\overline{CD}=x$，$\overline{BC}=y$，$\overline{AB}=2$，$x,y\in N$

故 $(2-x)^2+y^2=x^2 \quad \Rightarrow y^2=4(x-1)$ 爲完全平方，令 $x=t^2+1$，$y=2t$，$t\in N$

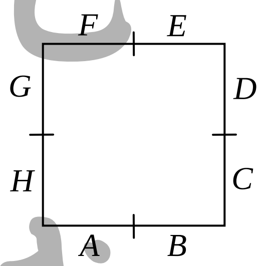
則 $P=2x+y+2=2t^2+2t+3<2015 \quad \Rightarrow t(t+1)<1006 \quad \Rightarrow t=1\sim 31$

25. 設 S 是一個邊長爲1的正方形，在 S 的邊界上任選兩點，若這兩點連線段長至少是 $\frac{1}{2}$ 的機率爲 $\frac{a-b\pi}{c}$，其中 a、b、c 均爲正整數，且 a、b、c 的最大公因數爲1，則 $a+b+c=$？

(A) 59　(B) 60　(C) 61　(D) 62　(E) 63。【2015AMC10A】

答：(A)

解：將正方形邊長（已知爲 1）分成八段，並以 A 段爲主考量第 2 點可能所在區段



(i) 當第 2 點 $\in C,D,E,F,G$

兩點距離必 $\geq \frac{1}{2}$，機率 $\frac{5}{8}$

(ii) 當第 2 點 $\in B$，兩點距離 $\geq \frac{1}{2}$

之機率爲 $\frac{1}{8}\times\frac{(0+1)\times 1}{2}=\frac{1}{16}$

(iii) 當第 2 點 $\in H$，兩點距離 $\geq \frac{1}{2}$

之機率爲 $\frac{1}{8}\times\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{8}-\frac{\pi}{32}$

合計

$\frac{5}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}-\frac{\pi}{32}$

$=\frac{26-\pi}{32}$