北 一 女 中 88 學 年 度 數 學 競 試 （ 高 二 高 三 組 ） 試 題

[注意事項]:
(1)**請將答案寫在答案卷上,不可使用計算器不可使用計算器**.
(2)**時間** 2 **小時**.(1999.10.25 **下午** 1:10~3:10)

[問題一]填充題,每格 8 **分**

1.**定義在自然數集合上的函數** $f(x), x\in \mathrm{N}$, **滿足** $f(1)=1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + m\cdot n$, **求** $f(1999)=$ ＿(甲)＿

2.**設** $s=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k^2}}$,**求** s **的整數部分為**＿(乙)＿

3.**在**△ABC **中,已知**:$\tan A+\tan B+\tan C=-\frac{1}{6}$;$\tan^3 A+\tan^3 B+\tan^3 C=-\frac{181}{216}$,**求**△ABC **中最大角的度量**＿(丙)＿(**答一數值**)

4.**已知**
$$\begin{cases}\frac{x^2}{2^2-1^2}+\frac{y^2}{2^2-3^2}+\frac{z^2}{2^2-5^2}+\frac{w^2}{2^2-7^2}=1\\ \frac{x^2}{4^2-1^2}+\frac{y^2}{4^2-3^2}+\frac{z^2}{4^2-5^2}+\frac{w^2}{4^2-7^2}=1\\ \frac{x^2}{6^2-1^2}+\frac{y^2}{6^2-3^2}+\frac{z^2}{6^2-5^2}+\frac{w^2}{6^2-7^2}=1\\ \frac{x^2}{8^2-1^2}+\frac{y^2}{8^2-3^2}+\frac{z^2}{8^2-5^2}+\frac{w^2}{8^2-7^2}=1\end{cases}$$
求 $x^2+y^2+z^2+w^2=$＿(丁)＿

[問題二]8 **分**

如果實數 x,y **滿足**$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$,**求證** $x+y=0$

[問題三]15 **分**

設 S **為**△ABC **的面積,求證** $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$

[問題四]15 **分**

給定正整數集合上函數 $f(n)$,**滿足下列條件**
如果 $n>2000$, $f(n)=n-12$;**如果** $n\leq 2000$, $f(n)=f(f(n+16))$
(i)**求** $f(n)$　　　　(ii)**求方程** $f(n)=n$ **的所有解**.

[問題五]15 **分**

求證:$\sqrt{2}-1$ **的每個正整數冪都試形如的每個正整數冪都是形如**$\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$,**其中其中** m **是某個正整數**.

[問題六]15 **分**

ABCD **是一個四邊形**,AD=BC,∠A+∠B=120°,**由** AC,DC **和** DB **遠離遠離** AB **作三個等邊三角形**△ACP,△DCQ **和**△DBR,**求證**:P,Q,R **三點共線**.