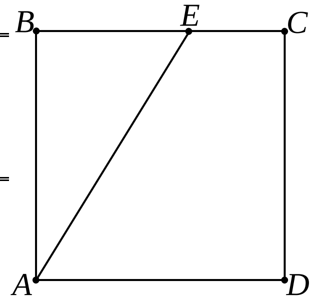
2013 第 64 屆 AMC12 試題

俞克斌老師編寫

1. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長爲 10，點 E 在 $\overline{BC}$ 邊上，
   且 ΔABE 的面積爲 40。試問 $\overline{BE}=$ ？
   (A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7　(E) 8　【2013AMC】



答：(E)

解：ΔABE 面積 $=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BE} \Rightarrow 40=\frac{1}{2}\times 10\times\overline{BE} \Rightarrow \overline{BE}=8$

2. 某壘球隊打了 10 場比賽，分別得到 1、2、3、4、5、6、7、8、9 及 10 分。此隊有五場比賽恰輸給對手一分，其餘的每一場比賽他們的得分都是對手的兩倍。試問他們對手得分的總和是多少分？
   (A) 35　(B) 40　(C) 45　(D) 50　(E) 55　【2013AMC】

答：(C)

解：得分爲對手兩倍：$2,4,6,8,10$
　即對手得分：$1,2,3,4,5$，總共15分
　得分輸對手一分：$1,3,5,7,9$
　即對手得分：$2,4,6,8,10$，總共 30 分
　故對手總得分 45 分

3. 由紫色玫瑰、紅色玫瑰、紫色康乃馨、及紅色康乃馨組成的一束花。已知紫色的花朵中有三分之一是玫瑰，紅色的花朵中有四分之三是康乃馨，且這束花中有十分之六的花朵是紫色的。試問這束花中有百分之幾是康乃馨？
   (A) 15　(B) 30　(C) 40　(D) 60　(E) 70　【2013AMC】

答：(E)

解：$\underbrace{\frac{4}{10}\times\frac{3}{4}}_{\text{紅康乃馨}}+\underbrace{\frac{6}{10}\times\frac{2}{3}}_{\text{紫康乃馨}}=\frac{7}{10}$

4. 試求 $\dfrac{2^{2014}+2^{2012}}{2^{2014}-2^{2012}}=$ ？
   (A) -1　(B) 1　(C) $\frac{5}{3}$　(D) 2013　(E) 2^{4024}　【2013AMC】

答：(C)

解：原式 $=\dfrac{2^{2012}\left[2^2+1\right]}{2^{2012}\left[2^2-1\right]}=\dfrac{5}{3}$

5. 小唐、小杜與小珊一同去旅遊，他們說好要均攤這次旅遊的花費。在這次旅遊中小唐付了 105 元，小杜付了 125 元，小珊付了 175 元。為了均分花費，小唐需給小珊 t 元，小杜需給小珊 d 元，則 $t-d=$？

(A) 15　(B) 20　(C) 25　(D) 30　(E) 35　【2013AMC】

答：(B)

解：$\frac{1}{3}(105+125+175)=135$，故 $t=30$，$d=10$

6. 在最近的一場籃球賽中，小珊只投三分球及兩分球。她投三分球的命中率為 20%，投兩分球的命中率為 30%，這場球賽她投了 30 球，試問她總共得到幾分？

(A) 12　(B) 18　(C) 24　(D) 30　(E) 36　【2013AMC】

答：(B)

解：令三分球投 x 個，二分球投 y 個，$x+y=30$

得分 $\frac{2}{10}\times x\times 3+\frac{3}{10}\times y\times 2=\frac{6}{10}(x+y)=18$

7. 有一數列 S_1，S_2，S_3，$\cdots$，S_{10} 滿足從第三項開始，每一項為前兩項的和，即 $S_n=S_{n-2}+S_{n-1}$，$n\geq 3$。若 $S_9=110$ 且 $S_7=42$，則 $S_4=$？

(A) 4　(B) 6　(C) 10　(D) 12　(E) 16　【2013AMC】

答：(C)

解：$S_9=110$，$S_8=68$，$S_7=42$，$S_6=26$，$S_5=16$，$S_4=10$

8. 設 x 與 y 為相異且都不是零的實數，滿足 $x+\frac{2}{x}=y+\frac{2}{y}$，則 $xy=$？

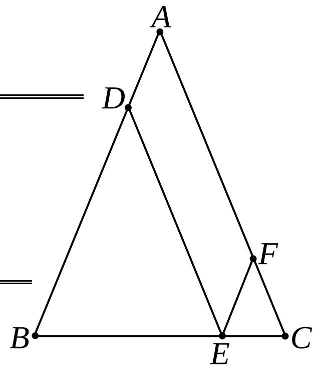
(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2　(E) 4　【2013AMC】

答：(D)

解：原式：$(x-y)=\frac{2}{xy}(x-y)\ \Rightarrow\ xy=2$

9. 在 ΔABC 中 $\overline{AB}=\overline{AC}=28$，$\overline{BC}=20$。若點 D、E 及 F 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 及 $\overline{AC}$ 上，使得 $\overline{DE}$ 與 $\overline{EF}$ 分別平行於 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$，則平行四邊形 $ADEF$ 的周長為多少？

(A) 48　(B) 52　(C) 56　(D) 60　(E) 72　【2013AMC】



答：(C)

解：$\overline{AF}+\overline{FE}+\overline{ED}+\overline{DA}=2\left(\overline{AF}+\overline{FE}\right)=2\left(\overline{AF}+\overline{FC}\right)=56$

10. 設 S 為所有正整數 n 所成的集合，其中 n 滿足 $\frac{1}{n}$ 可表示為循環小數 $0.\overline{ab}=0.ababab\cdots$，其中 a、b 為相異正整數。試問 S 中所有的數之和是多少？

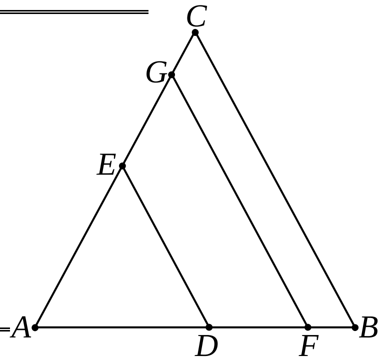
(A) 11　(B) 44　(C) 110　(D) 143　(E) 155　【2013AMC】

答：送分

11. 正三角形 ABC 的邊 $\overline{AB}=1$，點 E 及點 G 在 $\overline{AC}$ 上，
點 D 及點 F 在 $\overline{AB}$ 上，使得 $\overline{DE}$ 和 $\overline{FG}$ 均與 $\overline{BC}$ 平行。
若三角形 ADE 與梯形 $DFGE$ 及梯形 $FBCG$ 的周長均相等，
則 $\overline{DE}+\overline{FG}=$？

(A) 1 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{21}{13}$ (D) $\dfrac{13}{8}$ (E) $\dfrac{5}{3}$

【2013AMC】

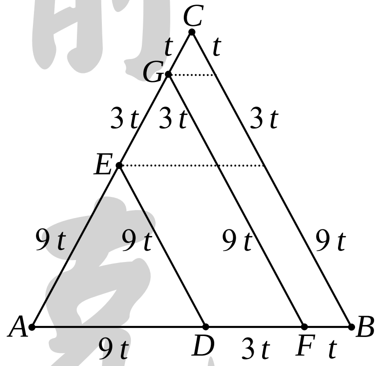


答：(C)

解：三者周長均爲 $27t$

邊長 $13t=1 \Rightarrow t=\dfrac{1}{13}$

$\overline{DE}+\overline{FG}=9t+12t=\dfrac{21}{13}$



12. 某三角形的內角度數爲等差數列，而其邊長分別爲 4、5、x。
若所有 x 可能值的總和爲 $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}$，
其中 a、b、c 均爲正整數，則 $a+b+c=$？
(A) 36 (B) 38 (C) 40 (D) 42 (E) 44 【2013AMC】

答：(A)

解：若三邊爲 $x<4<5 \Rightarrow \cos 60^\circ=\dfrac{x^2+5^2-4^2}{2\cdot x\cdot 5} \Rightarrow x$ 無解

若三邊爲 $4<x<5 \Rightarrow \cos 60^\circ=\dfrac{4^2+5^2-x^2}{2\cdot 4\cdot 5} \Rightarrow x=\sqrt{21}$

若三邊爲 $4<5<x \Rightarrow \cos 60^\circ=\dfrac{4^2+x^2-5^2}{2\cdot 4\cdot x} \Rightarrow x=2+\sqrt{13}$

x 可能值總和 $2+\sqrt{13}+\sqrt{21}$

13. 設 $A(0,0)$、$B(1,2)$、$C(3,3)$、$D(4,0)$ 爲平面上四點，四邊形 $ABCD$ 被通過點 A 的一條直線將面積平分，此直線與 $\overline{CD}$ 交於點 $\left(\dfrac{p}{q},\dfrac{r}{s}\right)$。若坐標中的分數均爲最簡分數，
則 $p+q+r+s=$？
(A) 54 (B) 58 (C) 62 (D) 70 (E) 75 【2013AMC】

答：(B)

解：$ABCD$ 面積 $=\dfrac{1\times 2}{2}+\dfrac{(2+3)\times 2}{2}+\dfrac{1\times 3}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\times 4\times k\right)\times 2 \Rightarrow k=\dfrac{15}{8}$

又 $(3,3)$，$\left(h,\dfrac{15}{8}\right)$，$(4,0)$ 共線 $\Rightarrow h=\dfrac{27}{8}$

表所求交點 $\left(\dfrac{27}{8},\dfrac{15}{8}\right)$

14. 若數列 $\log_{12}162$ 、 $\log_{12}x$ 、 $\log_{12}y$ 、 $\log_{12}z$ 、 $\log_{12}1250$ 爲等差數列，則 $x=$ ？
(A) $125\sqrt{3}$ (B) 270 (C) $162\sqrt{5}$ (D) 434 (E) $225\sqrt{6}$ 【2013AMC】

答：(B)

解：公差 $=\frac{1}{4}\left(\log_{12}1250-\log_{12}162\right)=\log_{12}\frac{5}{3}$

故 $x=162\times\frac{5}{3}=270$

15. 兔子<u>彼得</u>與<u>寶琳</u>有三隻兔寶寶－<u>小福</u>、<u>小默</u>及<u>小棉</u>。將這五隻兔子分置於四家寵物店，且兔寶寶不可和牠的父親或母親在同一家店裡。若不要求每家寵物店一定要有兔子，則總共多少種不同的分法？
(A) 96 (B) 108 (C) 156 (D) 204 (E) 372 【2013AMC】

答：(D)

解：$\underbrace{C^4_1\left[3^3\right]}_{\text{父母在一家}}+\underbrace{C^4_2\times 2!\left[2^3\right]}_{\text{父母在兩家}}=108+96=204$

16. 設有 A 、 B 、 C 三堆石頭，已知 A 堆平均每塊石頭的重量爲 40 磅，B 堆平均每塊石頭的重量爲 50 磅，A 和 B 兩堆合在一起平均每塊石頭的重量爲 43 磅，A 和 C 兩堆合在一起平均每塊石頭的重量爲 44 磅。試問 B 和 C 兩堆合在一起平均每塊石頭的重量爲整數的最大可能值是多少？
(A) 55 (B) 56 (C) 57 (D) 58 (E) 59 【2013AMC】

答：(E)

解：$\frac{40A+50B}{A+B}=43 \Rightarrow 7B=3A \Rightarrow$ 令 $A=7t$，$B=3t$

$\frac{40A+PC}{A+C}=44 \Rightarrow (P-44)C=4A=28t$，$P>44$

$$\frac{50B+PC}{B+C}=\frac{50\times 3t+P\times\frac{8t}{P-44}}{3t+\frac{28t}{P-44}}=\frac{178P-6600}{3P-104}=59+\frac{P-464}{3P-104}$$

顯然若 $\frac{P-464}{3P-104}>1 \Rightarrow P<-180$ 矛盾

故最大平均值爲 $59+0=59$，此時 $P=464$

17. 一群 12 名海盜同意將金庫中的金幣依序分贓方式如下：第 k 名海盜拿走金庫中所剩金幣的 $\frac{k}{12}$ 。在這種分配方式下，若最初金庫中有最少枚金幣使得每位海盜都剛好可以拿到整數枚金幣時，則第 12 名海盜拿到幾枚金幣？
(A) 720 (B) 1296 (C) 1728 (D) 1925 (E) 3850 【2013AMC】

答：(D)

解：第一位拿走金幣後，剩餘全部金幣之 $\frac{11}{12}$

第二位拿走金幣後，剩餘全部金幣之$\dfrac{11}{12}\times\dfrac{10}{12}$

$\vdots$

第十一位拿走金幣後，剩餘全部金幣之$\dfrac{11!}{12^{11}}$

故第十二位拿了全部金幣之$\dfrac{2^8\times3^4\times5^2\times7^1\times11^1}{2^{22}\times3^{11}}=\dfrac{5^2\times7^1\times11^1}{2^{14}\times3^7}$

故第十二位至少拿了$5^2\times7^1\times11^1$枚$=1925$枚

18. 六個半徑爲 1 的球，它們的球心置於邊長爲 2 的正六邊形的六個頂點，且這六個球均內切於一個以此六邊形中心爲球心的大球。第八個球與六個小球均外切，且內切於大球。試問第八個球的半徑爲多少？

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{5}{3}$　(D) $\sqrt{3}$　(E) 2　【2013AMC】

答：(B)

解：小球對面球心相距 4（即六邊形對角線）

大球半徑$=2+1=3$，中球半徑r

則$(r+1)^2=(3-r)^2+2^2 \Rightarrow r=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

19. 在ΔABC中，$\overline{AB}=86$，$\overline{AC}=97$。一個以點A爲圓心，且以$\overline{AB}$爲半徑的圓交$\overline{BC}$於點B及點X。若$\overline{BX}$與$\overline{CX}$均爲整數，則$\overline{BC}=$？

(A) 11　(B) 28　(C) 33　(D) 61　(E) 72　【2013AMC】

答：(D)

解：$\cos\angle AXC=-\cos AXB \Rightarrow \dfrac{86^2+\overline{CX}^2-97^2}{2\cdot86\cdot\overline{CX}}=-\dfrac{86^2+\overline{BX}^2-86^2}{2\cdot86\cdot\overline{BX}}$

$\Rightarrow \overline{CX}^2-2013=-\overline{BX}\,\overline{CX} \Rightarrow \overline{CX}\left[\overline{CX}+\overline{BX}\right]=2013=3\times11\times61$

但$86+97>\overline{BC}$　$\therefore \overline{BC}=61$

20. 設集合S爲$\{1,2,3,\cdots,19\}$，對於a、$b\in S$，當$0<a-b\le9$或$b-a>9$，以$a\succ b$表示。試問S中同時滿足$x\succ y$，$y\succ z$且$z\succ x$的三元序對(x,y,z)有多少個？

(A) 810　(B) 855　(C) 900　(D) 950　(E) 988　【2013AMC】

答：(B)

解：依題意條件，以$x=1$爲例（$x\in\{1,2,3,\cdots,19\}$）

$$x=1\left\{\begin{array}{ll} y=11 & z=10,9,8,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,2\ \text{共9組} \\ y=12 & z=10,9,8,\cdots\cdots\cdots\cdots,3\ \text{共8組} \\ y=13 & z=10,9,8,\cdots\cdots\cdots,4\ \text{共7組} \\ y=14 & z=10,9,8,\cdots,5\ \text{共6組} \\ \vdots & \vdots \\ y=19 & z=10\ \text{共1組} \end{array}\right.$$

$19\times\left[9+8+7+6+\cdots+1\right]=19\times45=855$

21. 設 $A=\log\left(2013+\log\left(2012+\log\left(2011+\log\left(\cdots+\log\left(3+\log2\right)\cdots\right)\right)\right)\right)$，
則下列哪一個區間包含 A？
(A) $\left(\log2016,\log2017\right)$　(B) $\left(\log2017,\log2018\right)$　(C) $\left(\log2018,\log2019\right)$
(D) $\left(\log2019,\log2020\right)$　(E) $\left(\log2020,\log2021\right)$　【2013AMC】

$\boxed{答}$：(A)

$\boxed{解}$：$\log\left(9+\log\left(8+\log\left(7+\cdots+\log\left(3+\log2\right)\right)\right)\right)=0.\cdots=A$

$\log\left(98+\log\left(97+\log\left(96+\cdots+\log\left(10+A\right)\right)\right)\right)=1.\cdots=B$

$\log\left(997+\log\left(996+\log\left(995+\cdots+\log\left(99+B\right)\right)\right)\right)=2.\cdots=C$

$\log\left(2012+\log\left(2011+\log\left(2010+\cdots+\log\left(998+C\right)\right)\right)\right)=3.\cdots=D$

$\log\left(2013+D\right)=\log2016.\cdots$

22. 一個 10 進位且第一個數字不是零的正整數，若這個數的各位數字由左向右讀與由右向左讀都一樣，就稱它爲**迴文數**。隨機選取一個 6 位數的迴文數 n，試問 $\dfrac{n}{11}$ 仍爲迴文數的機率爲多少？
(A) $\dfrac{8}{25}$　(B) $\dfrac{33}{100}$　(C) $\dfrac{7}{20}$　(D) $\dfrac{9}{25}$　(E) $\dfrac{11}{30}$　【2013AMC】

$\boxed{答}$：(E)

$\boxed{解}$：依題意 $n=ABCBA$

$$原數=ABCBA\times11=ABCBA0+ABCBA=A\begin{pmatrix}B\\+\\A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\+\\B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\+\\C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\+\\B\end{pmatrix}A$$

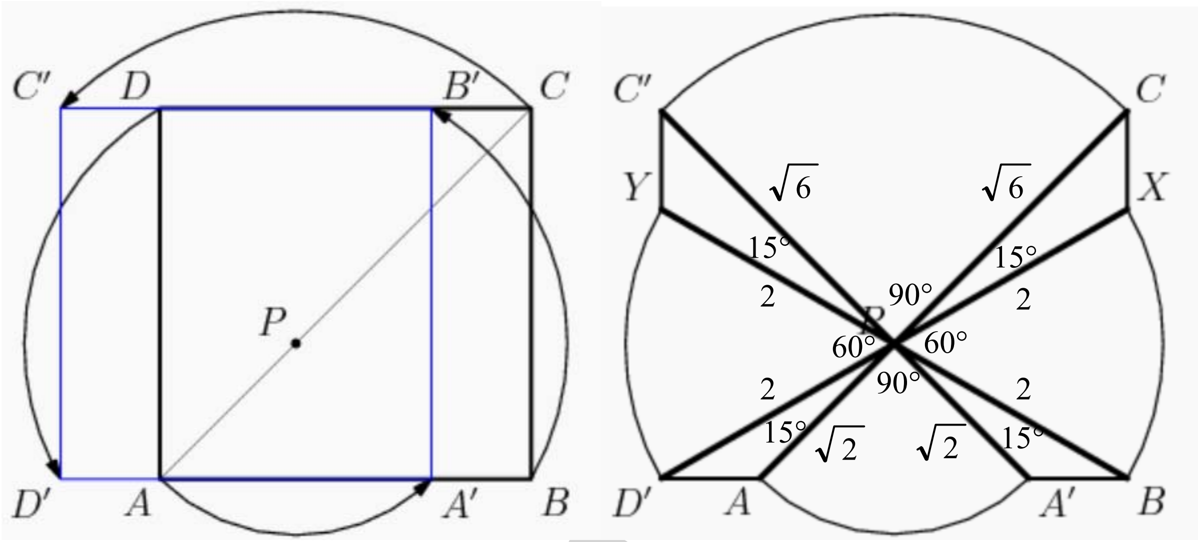
$$顯然\begin{pmatrix}B\\+\\A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\+\\B\end{pmatrix}均不可進位$$

$$\left.\begin{array}{l}當B=0，A=1\sim9，C=0\sim9\\當B=1，A=1\sim8，C=0\sim8\\當B=2，A=1\sim7，C=0\sim7\\\quad\vdots\\當B=8，A=1，C=0,1\end{array}\right\}\begin{array}{l}共有1\times2+\cdots+7\times8+8\times9+9\times10\\=\sum_{k=1}^{9}k\left(k+1\right)=\dfrac{1}{3}\times9\times10\times11\\=330組\end{array}$$

$$所求機率=\frac{330}{9\times10\times10}=\frac{11}{30}$$

23. 正方形 $ABCD$ 的邊長爲 $\sqrt{3}+1$，點 P 在 $\overline{AC}$ 上使得 $\overline{AP}=\sqrt{2}$。
若將正方形 $ABCD$ 以點 P 爲中心逆時針旋轉 90° 所掃過的面積爲 $\dfrac{1}{c}\left(a\pi+b\right)$，
其中 a、b、c 爲正整數，且三數的最大公因數 $\gcd\left(a,b,c\right)=1$，則 $a+b+c=$？
(A) 15　(B) 17　(C) 19　(D) 21　(E) 23　【2013AMC】

$\boxed{答}$：(C)

解：

所求面積爲$\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}\right)^2\times\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\times\frac{\pi}{2}+2\times\frac{1}{2}(2)^2\times\frac{\pi}{3}\right]$

$$+2\left[\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{6}\times\sin15^\circ+\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}\times\sin15^\circ\right]=\frac{10\pi}{3}+2=\frac{1}{3}\left(10\pi+6\right)$$

24.以正 12 邊形的頂點爲端點的所有線段，隨機選取三條相異線段，
試問這三條線段的長度可以構成一個三角形的機率爲多少？
(A) $\frac{553}{715}$ (B) $\frac{443}{572}$ (C) $\frac{111}{143}$ (D) $\frac{81}{104}$ (E) $\frac{223}{286}$ 【2013AMC】

答：(E)

解：當半徑爲 1，可形成六種邊長長度

$\sqrt{2-\sqrt{3}},1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2+\sqrt{3}}$（每種 12 條）,2（有 6 條）

形成三角形分類：

三同：$C_3^{12}\times5+C_3^{6}\times1=1100+20=1120$

二同一異：$C_2^{6}C_1^{12}\times5+C_2^{12}C_1^{6}\times3+C_2^{12}C_1^{12}\times\left(4\times4+1\right)=990+1188+13464=15552$

三異：$C_1^{12}C_1^{12}C_1^{6}\times8+C_1^{12}C_1^{12}C_1^{12}\times7=6912+12096=19008$

機率$=\frac{1120+15552+19008}{C_3^{66}}=\frac{35680}{45760}=\frac{223}{286}$

25.設 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 定義爲 $f(z)=z^2+iz+1$。試問有多少個複數 z，滿足 z 的虛部大於 0 且 $f(z)$ 的實部與虛部的絕對值都是至多爲 10 的整數？
(A) 399 (B) 401 (C) 413 (D) 431 (E) 441 【2013AMC】

答：(A)

解：令 $z=x+yi$，$x,y\in R$，$y>0$

$$f(x+yi)=(x+yi)^2+i(x+yi)+1=\left[x^2-y^2-y+1\right]+\left[2xy+x\right]i$$

令 $x^2-y^2-y+1=z_1$，即 $x^2-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=z_1-\frac{5}{4}$

令 $2xy+x=z_2$，即 $x\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{z_2}{2}$

其中 $0\le|z_1|$，$|z_2|\le 10$，z_1, z_2 爲整數

顯然 (x,y) 爲 $\begin{cases} x^2-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=z_1-\frac{5}{4} \\ x\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{z_2}{2} \end{cases}$ 這兩圖形之交點