

# 103 年大學入學指定科目考試試題

## 數學乙

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 76 分）

一、單選題（占 12 分）

1. 座標平面上滿足  $10^x \cdot 100^y = 1000$  的所有點  $(x, y)$  所形成的圖形為下列哪個選項？

- (1) 一個點 (2) 一直線 (3) 兩直線 (4) 一個二次多項式的函數圖形 (5) 一個圓

【103 數乙】

答：(2) **(第一冊第三章指數對數—運算律)**

解：  $10^{x+2y} = 10^3 \Rightarrow x+2y=3$

2. 某班有 41 名學生，已知某次考試成績全班的平均分數為 64，最高分為 97，最低分為 24。欲將全班學生成績做線性調整（調整後分數 =  $a + b \times$  原始分數，其中  $b > 0$ ）使得最高分為 100 及最低分為 50。請選出正確的選項。

- (1) 調整後分數的平均值較原始分數的平均值低  
(2) 調整後分數的中位數和原始分數的中位數一樣  
(3) 調整後分數的中位數較原始分數的中位數高  
(4) 調整後分數的標準差和原始分數的標準差一樣  
(5) 調整後分數的標準差較原始分數的標準差大

【103 數乙】

答：(3) **(第二冊第四章數據分析—平移伸縮)**

解：  $\begin{cases} 100 = a + 97b \\ 50 = a + 24b \end{cases} \Rightarrow b = \frac{50}{73}, a = \frac{2450}{73}$

(1)  $\bar{X}$  變大 (2)(3) 中位數變大

(4)(5) 標準差變小(原來的  $\frac{50}{73}$ )

二、多選題（占 40 分）

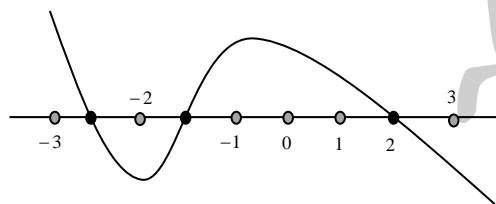
3. 三次實係數多項式  $f(x)$  滿足  $f(-3) > 0, f(-2) < 0, f(-1) > 0, f(1) > 0, f(2) = 0$ 。請選出正確的選項。

- (1)  $f(0) < 0$  (2)  $f(x) = 0$  恰有一根介於 -3 與 -2 之間  
(3)  $f(x) = 0$  恰有一根介於 -2 與 0 之間 (4)  $f(x) = 0$  在 0 與 1 之間有根  
(5)  $f(x) = 0$  在 -3 與 3 之間恰有三個根

【103 數乙】

答：(2)(3)(5) **(第一冊第二章多項函數—勘根定理)**

解：



4. 請選出正確的選項。

- (1) 隨機亂數表的任一列中，0 到 9 各數字出現的次數皆相同  
 (2) 擲一枚均勻的銅板 10 次，若前 5 次出現 3 次正面與 2 次反面，則後 5 次必定出現 2 次正面與 3 次反面  
 (3) 投擲一枚均勻的銅板 2 次，在正面至少出現 1 次的條件下，2 次都出現正面的條件機率等於  $\frac{1}{3}$   
 (4) 投擲 6 顆公正的骰子，1、2、3、4、5、6 點都出現的機率小於  $\frac{1}{6}$   
 (5) 從一副 52 張的撲克牌（紅黑各有 26 張）中，隨機抽取相異的兩張，這兩張牌都是紅色的機率為  $\frac{1}{4}$

【103 數乙】

**答：**(3)(4) **(第二冊第三章機率)**

**解：**(1) 錯誤，無此結論，應為整個亂數表內各數出現頻率相同

(2) 錯誤，違反隨機概念

(3) 正確：
$$\frac{(+ +)}{(+ +)(+ -)(- +)}$$

(4) 正確：
$$\frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324} < \frac{1}{6}$$

(5) 錯誤，應為 
$$\frac{C_2^{26}}{C_2^{52}} = \frac{25}{102} < \frac{1}{4}$$

5. 請選出正確的選項。

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^n = 0$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3^n}{6^n + 7^n} = 0$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1$

【103 數乙】

**答：**(1)(3)(4) **(第六冊第一章極限概念)**

**解：**(2) 應為發散 (5) 應收斂於 0

6. 假設多項式  $f(x) = 2 - 2x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-2)g(x)$ ，

其中  $g(x)$  為一實係數多項式。請選出一定正確的選項。

(1)  $f(x)$  有  $(x-1)$  的因式

(2)  $f(x)$  沒有  $(x+1)$  的因式

(3)  $f(x)$  被  $(x-2)$  除的餘式等於 6

(4) 0 不是  $f(x) = 0$  的根

(5) 通過  $(0, f(0))$ 、 $(1, f(1))$ 、 $(2, f(2))$  的最低次插值多項式為  $2 - 2x + 4x(x-1)$

【103 數乙】

**答：**(1)(3)(4)(5) **(第一冊第二章多項函數—多項式、插值法)**

**解：**(2) 無法確定

7. 三個相異實數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  滿足  $b = \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c$ ，如果將  $a$ 、 $b$ 、 $c$  標示在數線上，則

- (1)  $b$  在  $a$  與  $c$  之間 (2)  $c > b$   
 (3) 若  $d = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c$ ，則  $d$  在  $a$  與  $b$  之間 (4)  $a$  到  $c$  的距離是  $a$  到  $b$  的距離的 5 倍  
 (5) 如果  $|b| = \frac{4}{5}|a| + \frac{1}{5}|c|$ ，則  $a \cdot b \cdot c > 0$  【103 數乙】

**答**：(1)(4) **(第一冊第一章數與式一分點公式、數線比大小、絕對值距離)**

**解**：(1) 正確， $b$  為  $a$  與  $c$  之內分點，故  $b$  在  $a$  與  $c$  之間  
 (2) 錯誤，因為  $a$ 、 $c$  大小不確定，可能  $a < b < c$  或  $c < b < a$   
 (3) 錯誤，因為  $d$  為  $a$ 、 $c$  之外分點，必不在  $a$ 、 $b$  之間  
 (4) 正確， $|a-b| = \left| a - \frac{4}{5}a - \frac{1}{5}c \right| = \frac{1}{5}|a-c|$   
 (5) 錯誤，可能  $abc = 0$  (反例： $c = 0$ 、 $a = 5$ 、 $b = 4$ )

### 三、填充題 (占 24 分)

1. 用 1、5、6、7、9 組成的三位數 (不同位可以用相同數字)，其個位數字、十位數字、百位數字的總和為偶數者共有 \_\_\_\_\_ 種。 【103 數乙】

**答**：49 **(第二冊第二章排列組合)**

**解**：(6, 6, 6)  $\Rightarrow$  1 種

$$(6, *, *) \Rightarrow \frac{3!}{2!} \times \underbrace{4}_{* \text{可放 } 1, 5, 7, 9} = 12 \text{ 種}$$

$$(6, *, \oplus) \Rightarrow 3! \times \underbrace{C_2^4}_{*, \oplus \text{可放 } 1, 5, 7, 9} = 36 \text{ 種}$$

2. 設  $A(1, 2)$ 、 $B(1, -2)$  為平面上兩定點，點  $P$  為  $x$  軸正向上的一點。若內積  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 5$ ，則點  $P$  之座標為 \_\_\_\_\_。 【103 數乙】

**答**：(4, 0) **(第三冊第三章平面向量—內積)**

**解**： $P(x, 0)$ ， $x > 0$ ，而  $\overrightarrow{PA} = (1-x, 2)$ ， $\overrightarrow{PB} = (1-x, -2)$   
 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2 - 2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 4, -2$  (不合)

3. 設  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  為二階方陣，已知  $PQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ ， $PR = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$  且  $Q + R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，則  $P =$  \_\_\_\_\_。 【103 數乙】

**答**： $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$  **(第四冊第三章矩陣—分配律、反矩陣)**

**解**： $P(Q + R) = PQ + PR \Rightarrow P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 16 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

1. 座標平面上有三點  $O(0,0)$ 、 $A(11,2)$ 、 $B(23,18)$ 。直線  $L$  通過  $A$  點且與線段  $\overline{AB}$  垂直。
- (1) 求直線  $L$  上與  $A$  點距離為 5 的兩點  $C$ 、 $D$  之座標。
- (2) 求  $\triangle OCD$  的面積。

【103 數乙】

**答：** (1)  $(15, -1)$ ， $(7, 5)$  (2) 41 **（第三冊第三章平面向量—係數積、面積）**

**解：**  $\overrightarrow{AB} = (12, 16) = 4(3, 4)$ ，故與  $\overline{AB}$  垂直，且長度為 5 之向量為  $\pm(4, -3)$

$$\text{故 } \overrightarrow{AC} = (x_1 - 11, y_1 - 2) = (4, -3) \Rightarrow C(x_1, y_1) = (15, -1)$$

$$\text{故 } \overrightarrow{AD} = (x_2 - 11, y_2 - 2) = (-4, 3) \Rightarrow D(x_2, y_2) = (7, 5)$$

$$\triangle OCD = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \right\| = 41$$

2. 某工廠可以買甲、乙兩種規格的鐵板來製作「熊大」徽章、「兔兔」徽章和「饅頭人」徽章。每塊甲規格的鐵板可以製作 8 個「熊大」徽章、4 個「兔兔」徽章及 8 個「饅頭人」徽章，每塊乙規格鐵板可以製作 4 個「熊大」徽章、4 個「兔兔」徽章及 16 個「饅頭人」徽章。已知甲規格的鐵板每塊的成本為 400 元，乙規格的鐵板每塊的成本為 320 元；然而零售商需要 28 個「熊大」徽章、20 個「兔兔」徽章及 48 個「饅頭人」徽章。而為了滿足零售商的需求，設工廠要買進  $x$  塊甲規格鐵板、 $y$  塊乙規格鐵板，其中  $x$  和  $y$  為非負整數，由下列步驟，求出何時才能達到最低成本。

- (1) 寫出此問題的線性規劃不等式及目標函數。
- (2) 求可行解區域的所有頂點的座標。
- (3) 工廠所需最低成本為多少元？

【103 數乙】

**答：** 當  $x=2$ ， $y=3$  時，有最低成本 1760 元 **（第三冊第二章直線與圓—線性規劃）**

**解：**

	熊大	兔兔	饅頭人	成本
甲	8	4	8	400
乙	4	4	16	320
限制	$\geq 28$	$\geq 20$	$\geq 48$	最小值

$$\begin{cases} 8x + 4y \geq 28 \\ 4x + 4y \geq 20 \\ 8x + 16y \geq 48 \\ x, y \in N, 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 7 \\ x + y \geq 5 \\ x + 2y \geq 6 \\ x, y \in N, 0 \end{cases}$$

$$\text{目標函數：} f(x, y) = 400x + 320y$$

$(x, y)$	$(0, 7)$	$(2, 3)$	$(4, 1)$	$(6, 0)$
$f(x, y)$	2240	1760	1920	2400

當  $(x, y) = (2, 3)$  時，有最小值 1760

