103年大學入學指定科目考試試題
數學甲

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占76分）

一、單選題（占24分）

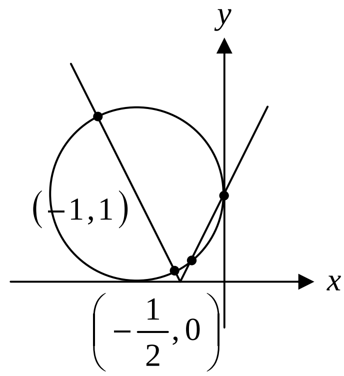
1. 在座標平面上，圓 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 與 $y=|2x+1|$ 的圖形有幾個交點？
   (1) 1個　(2) 2個　(3) 3個　(4) 4個　(5) 0個　【103數甲】

答：(4)（第三冊第二章直線與圓）

解：圓 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，表圓心 $(-1,1)$，半徑 1

折線 $y=2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$，以 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 爲折點，斜率 ± 2

兩者交於4點

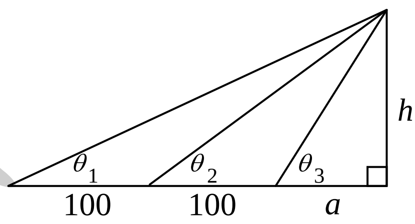


2. 在地面某定點測得數公里外高塔塔尖仰角爲 θ_1，
   朝高塔方向沿直線前進100公尺之後，重新測得塔尖仰角爲 θ_2，
   再沿同一直線繼續前進100公尺後，測得仰角爲 θ_3。
   請問下列哪一個選項的數值依序成等差數列？
   (1) $\theta_1,\theta_2,\theta_3$　(2) $\sin\theta_1,\sin\theta_2,\sin\theta_3$　(3) $\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3$
   (4) $\tan\theta_1,\tan\theta_2,\tan\theta_3$　(5) $\cot\theta_1,\cot\theta_2,\cot\theta_3$　【103數甲】

答：(5)（第三冊第一章三角）

解：

$$\left.\begin{aligned}\cot\theta_1&=\frac{a}{h}\\ \cot\theta_2&=\frac{a+100}{h}\\ \cot\theta_3&=\frac{a+200}{h}\end{aligned}\right\}\text{成爲公差}\frac{100}{h}\text{的等差數列}$$



3. 請問指數方程式 $2^{10^x}=10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？
   （$\log 2\approx 0.3010$、$\log 3\approx 0.4771$、$\log 7\approx 0.8451$）
   (1) 1.1　(2) 1.2　(3) 1.3　(4) 1.4　(5) 1.5　【103數甲】

答：(3)（第一冊第三章指數對數）

解：$10^x\log 2=6\quad\Rightarrow 10^x\fallingdotseq\dfrac{6}{0.3010}\fallingdotseq 19.93\cdots$

$\Rightarrow x\fallingdotseq\log 19.93\fallingdotseq\log 20\fallingdotseq 1.3$

4. 令多項式 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式的常數項爲 r_n。
請問極限 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ 爲下列哪一選項？

(1) 0　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 2　(4) 3　(5) 不存在　【103 數甲】

答：(3) **（第六冊第一章極限概念）**

解：$2(x+1)^n=(3x-2)^n\dfrac{2}{3^n}+R(x)$

$r_n=R(0)=2-(-2)^n\times\dfrac{2}{3^n}=2-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\times 2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=2-0\times 2=2$

二、多選題（占 40 分）

5. 給定向量 $\vec{u}=(2,2,1)$，請選出正確的選項：

(1) 可找到向量 $\vec{v}$ 使得 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{2}$

(2) 可找到向量 $\vec{v}$ 使得 $\vec{u}\times\vec{v}=(1,3,4)$

(3) 若非零向量 $\vec{v}$ 滿足 $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|=2\left|\vec{v}\right|$，則 $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$

(4) 若非零向量 $\vec{v}$ 滿足 $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=3\left|\vec{v}\right|$，則 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

(5) 若向量 $\vec{v}$ 滿足 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ 且 $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$，則 $\vec{v}=\vec{0}$　【103 數甲】

答：(1)(4)(5) **（第四冊第一章空間向量）**

解：(1) $\left|\vec{u}\right|=3$，故 $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times\left|\vec{v}\right|\cos\theta=\sqrt{2}$ 可以成立

(2) $(1,3,4)$ 與 $(2,2,1)$ 不垂直，故錯誤

(3) $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\left|\cos\theta\right|=3\left|\vec{v}\right|\left|\cos\theta\right|=2\left|\vec{v}\right|$

$\Rightarrow\left|\cos\theta\right|=\dfrac{2}{3}\quad\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}\neq 0$

(4) $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta=3\left|\vec{v}\right|\sin\theta=3\left|\vec{v}\right|$

$\therefore\sin\theta=1\quad\therefore\theta=90^\circ$，表 $\vec{u}\perp\vec{v}$

(5) $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta=3\left|\vec{v}\right|\sin\theta=\left|\vec{0}\right|=0$

但 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，故 $\sin\theta=1$，故 $\left|\vec{v}\right|=\left|\vec{0}\right|=0$

6. 考慮多項式函數 $f(x)=4x^3-11x^2+6x$。請選出正確的選項：

(1) 函數 f 的圖形在點 $(1,-1)$ 的切線斜率爲正

(2) 函數 f 的圖形與直線 $y=1$ 交於三點

(3) 函數 f 唯一相對極小值爲 $\dfrac{-9}{4}$

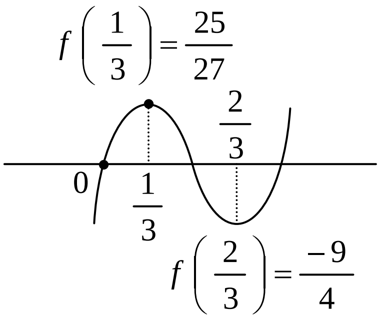
(4) $f(\pi)>0$

(5) $f\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}\right)>0$　【103 數甲】

答：(3)(4) **（第六冊第二章多項函數的微積分）**

解：$f'(x)=12x^2-22x+6=2[3x-1][2x-3]$

x		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



(1) $f'(1)<0$

(2) 與 $y=1$ 交於一點

(3) $\cos\frac{4\pi}{7}<0 \quad \therefore f\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right)<0$

7. 職業棒球季後賽第一輪採五戰三勝制，
當參賽甲、乙兩隊中有一隊贏得三場比賽時，就由該隊晉級而賽事結束。
每場比賽皆須分出勝負，且每場比賽的勝負皆不受之前已賽結果影響。
假設甲隊在任一場贏球的機率爲定值 p，
以 $f(p)$ 表實際比賽場數的期望值（其中 $0\le p\le 1$），請選出正確的選項：
(1) 只須比賽 3 場就產生晉級球隊的機率爲 $p^3+(1-p)^3$
(2) $f(p)$ 是 p 的 5 次多項式
(3) $f(p)$ 的常數項等於 3
(4) 函數 $f(p)$ 在 $p=\frac{1}{2}$ 時有最大值
(5) $f\left(\frac{1}{4}\right)<f\left(\frac{4}{5}\right)$
【103 數甲】

答：(1)(3)(4) **（第五冊第一章二項分配）（第六冊第二章多項函數的微積分）**

解：(1) 甲連三勝或連三敗：$p^3+(1+p)^3$

(2)(3) $f(p)=3\left[p^3+\left(1-p^3\right)\right]+4\left[p^3(1-p)+p(1-p)^3\right]\times\frac{3!}{2!}$

$$+5\left[p^3(1-p)^2+p^2(1-p)^3\right]\times\frac{4!}{2!2!}$$

$$=3\left[1-3p+3p^2\right]+12\left[-2p^4+4p^3-3p^2+p\right]$$

$$+30\left[p^4-2p^3+p^2\right]$$

$$=6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$$

(4) $f'(p)=24p^3-36p^2+6p+3=(2p-1)\left[12p^2-12p-3\right]$

當 $p=\frac{1}{2}$ 時，$f(p)$ 有最大值

(5) $f\left(\frac{1}{4}\right)>f\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{4}{5}\right)$

8. 考慮 x,y,z 的方程組 $\begin{cases} 2^x-3^y+5^z=-1 \\ 2^{x+1}+3^y-5^z=4 \\ 2^{x+1}+3^{y+1}+a5^z=8 \end{cases}$，其中 a 爲實數。請選出正確的選項：

(1) 若 (x,y,z) 爲此方程組的解，則 $x=0$

(2) 若 (x,y,z) 爲此方程組的解，則 $y>0$

(3) 若 (x,y,z) 爲此方程組的解，則 $y<z$

(4) 當 $a\neq-3$ 時，恰有一組 (x,y,z) 滿足此方程組

(5) 當 $a\neq-3$ 時，滿足此方程組的所有解 (x,y,z) 會在一條直線上 【103 數甲】

答：(1)(2) **（第一冊第三章指數）（第四冊第一章方程組）**

解：(1) 由第一、二式知 $2^x+2^{x+1}=3 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow x=0$

(2) 故 $3^y=5^z+2>1=3^0 \Rightarrow y>0$

(3) 反例：$z=0$，$y=\log_3 2>0$

(4) 原方程組：$\begin{cases} 3^y-5^z=2 \\ 3\cdot3^y+a\cdot5^z=6 \end{cases} \Rightarrow (a+3)5^z=0$

若 $a\neq-3$，則 $5^z=0$，無解

(5) 若 $a=-3$，則 $3^y-5^z=2$ 恆成立

但 $x=0$、$y>0$，故 $(x,y,z)\in$ 一射線

9. 在（凸）四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=x$，且對角線 $\overline{AC}=4$。請選出正確的選項：

(1) $\cos\angle ABC\geq\frac{3}{7}$

(2) $\cos\angle BAD>\cos\angle ABC$

(3) x 可能爲 1

(4) $x<\frac{13}{2}$

(5) 若 A、B、C、D 四點共圓，則 $x=\frac{7}{4}$ 【103 數甲】

答：(4)(5) **（第三冊第一章三角）**

解：(1) $\cos\angle ABC=\dfrac{3^2+4^2-4^2}{2\times3\times4}=\dfrac{3}{8}<\dfrac{3}{7}$

(2) $\because \angle BAD>\angle BAC=\angle ABC \quad \therefore \cos\angle BAD<\cos\angle ABC$

(3) $\because \overline{DA}+\overline{DC}>\overline{AC} \quad \therefore \overline{DA}>4-3 \quad \Rightarrow x>1$

(4) $\because ABCD$ 爲凸四邊形 $\quad \therefore \cos\angle ACD>\cos(180°-\angle ACB)$

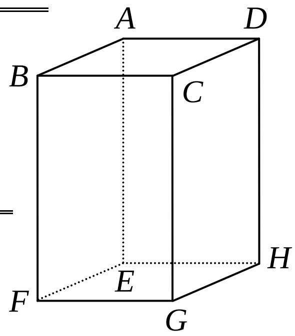
$\Rightarrow \dfrac{3^2+4^2-x^2}{2\cdot3\cdot4}>-\dfrac{4^2+4^2-3^2}{2\cdot4\cdot4} \Rightarrow x^2<\dfrac{169}{4} \quad \Rightarrow x<\dfrac{13}{2}$

(5) $\cos\angle ADC=-\cos\angle ABC$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+3^2-4^2}{2\cdot x\cdot3}=-\dfrac{3}{8} \quad \Rightarrow 4x^2+9x-28=0 \quad \Rightarrow x=\dfrac{7}{4}$ 或 -4（不合）

三、選填題（占 12 分）

1. 如圖，設 $ABCD-EFGH$ 爲空間中長、寬、高分別爲 2、3、5 的長方體。已知 $\overline{AB}=2$、$\overline{AD}=\overline{BC}=3$，且 $\overline{DH}=5$，則內積 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ 之值爲________。 【103 數甲】



答：9（第四冊第一章空間向量）

解：令 $A(0,0,5)$、$H(0,3,0)$、$C(2,3,5)$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=(0,3,-5)\cdot(2,3,0)=9$

2. 在遊戲中，阿玲拿到如右的數字卡。主持人隨機從 1 至 9 號球中同時取出三球，若這三球的號碼中任兩個都不在卡片上的同一行也不在卡片上的同一列時就得獎，則阿玲得獎的機率爲________。（化爲最簡分數） 【103 數甲】

1	2	3
8	9	4
7	6	5

答：$\dfrac{1}{14}$（第二冊第三章機率）

解：$\dfrac{3!}{C^9_3}=\dfrac{6}{84}=\dfrac{1}{14}$

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

1. 在座標平面上以 Ω 表曲線 $y=x-x^2$ 與直線 $y=0$ 所圍的有界區域。
   (1) 試求 Ω 的面積。
   (2) 若直線 $y=cx$ 將 Ω 分成面積相等的兩塊區域，試求 c 之值。 【103 數甲】

答：(1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$（第六冊第二章多項函數的微積分）

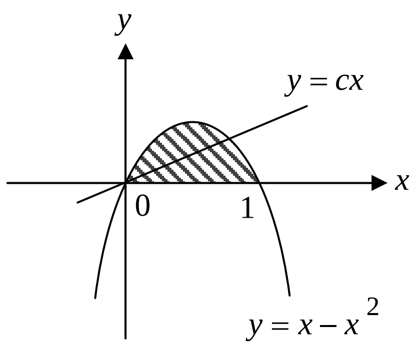
解：(1) $\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left[\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3+c\right]_0^1=\dfrac{1}{6}$

(2) $\begin{cases} y=cx \\ y=x-x^2 \end{cases}\Rightarrow x^2+(c-1)x=0 \quad\Rightarrow x=0,1-c$

$\int_0^{1-c}\left(-x^2+(1-c)x\right)dx=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\left[-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1-c}{2}x^2+c\right]_0^{1-c}=\dfrac{1}{12}$

$\Rightarrow(1-c)^3=\dfrac{1}{2} \qquad\Rightarrow c=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$



2. 對於正整數n，設$(1+i)^n=a_n+ib_n$，其中$i=\sqrt{-1}$且a_n、b_n爲實數。

(1) 試求$a_4^{\,2}+b_4^{\,2}$之值。

(2) 從恆等式$(1+i)^{n+1}=(1+i)^n(1+i)$可推得

a_n、b_n會滿足矩陣乘法$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，試求矩陣$T$。

(3) 令P、Q爲座標平面上異於原點O的兩點，

若矩陣T在平面上定義的線性變換將P、Q分別映射到點P'、Q'，

試證$\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$且$\angle POQ=\angle P'OQ'$。 【103 數甲】

答：(1) 16 (2) $T=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **（第四冊第三章矩陣）（第五冊第二章複數幾何）**

解：(1) $(1+i)^4=(2i)^2=-4$

故$a_4^{\,2}+b_4^{\,2}=(-4)^2+0^2=16$

(2) $(1+i)^{n+1}=(1+i)^n(1+i)$

$\Rightarrow \left[a_{n+1}+ib_{n+1}\right]=\left[a_n+ib_n\right](1+i)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，故$T=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $T=\sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$

表$\overline{OP'}=\sqrt{2}\,\overline{OP}$，$\angle P'OP=45^\circ$

$\overline{OQ'}=\sqrt{2}\,\overline{OQ}$，$\angle Q'OQ=45^\circ$

故$\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}=\sqrt{2}$，且$\angle POQ=\angle P'OQ'$

試題分析：

第一冊	指數對數(中)			
第二冊	機率(中)			
第三冊	直線與圓(易)	三角(中)	三角(中-難)	
第四冊	空間向量(中-難)	方程組(中-難)	空間向量(易)	矩陣(中-難)
第五冊	二項分配(中)			
第六冊	極限概念(中-難)	微分(中)	積分(中)	