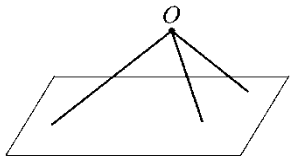
103學年度國立嘉義女中數學科甄選老師試題及詳解

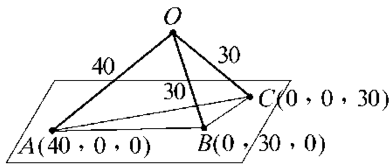
一、填充題 60%(每題 10 分)：

1.阿文為了實驗，用鐵條焊接了一個三隻腳都互相垂直的三腳架，若將此腳架放在水平地面上，使每一隻腳的底端都在地面上，如圖所示。已知三隻腳的長分別為 30 公分，40 公分，30 公分，則頂端 O 點到地面的距離為________公分。



【解答】 $\dfrac{120\sqrt{41}}{41}$

【詳解】



∵ 三隻腳兩兩互相垂直 ∴ 令 $\overleftrightarrow{OA}$，$\overleftrightarrow{OB}$，$\overleftrightarrow{OC}$ 分別為 x 軸，y 軸，z 軸之正向

則平面 E_{ABC}：$\dfrac{x}{40}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{30}=1 \Rightarrow E_{ABC}$：$3x+4y+4z-120=0$

所求 $=d(O；E_{ABC})=\dfrac{|0+0+0-120|}{\sqrt{9+16+16}}=\dfrac{120\sqrt{41}}{41}$

2.求 $\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\sin^2 4°+\cdots+\sin^2 269°+\sin^2 270°$ 之值 ＝ ________。

【解答】 $\dfrac{271}{2}$

【詳解】

∵ $\sin^2 269°=\sin^2(270°-1°)=\cos^2 1°$，⋯，$\sin^2 136°=\sin^2(270°-134°)=\cos^2 134°$

故原式$=(\sin^2 1°+\sin^2 269°)+(\sin^2 2°+\sin^2 268°)+\cdots+(\sin^2 134°+\sin^2 136°)+\sin^2 135°+\sin^2 270°=(1+1+\cdots+1+1)+\dfrac{1}{2}+1=134+\dfrac{3}{2}=\dfrac{271}{2}$

3. 送分

4.設 $abc \neq 0$，$\begin{vmatrix} b+c & b^2c^2 & bc \\ c+a & c^2a^2 & ca \\ a+b & a^2b^2 & ab \end{vmatrix}$的值為＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】見詳解

【證明】

$abc \neq 0$

$$\begin{vmatrix} b+c & b^2c^2 & bc \\ c+a & c^2a^2 & ca \\ a+b & a^2b^2 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(b+c) & ab^2c^2 & abc \\ b(c+a) & bc^2a^2 & abc \\ c(a+b) & ca^2b^2 & abc \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} ab+bc+ca & bc & 1 \\ ab+bc+ca & ca & 1 \\ ab+bc+ca & ab & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(abc)(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & ca & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5.由 1，2，3，4，5，6，7，8，9 等九個數字取出相異三個數字，可排成 6 個三位數，若此 6 個三位數的總和介於 3500 與 3700 之間，則取出三個數的方法有幾種？ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】8

【詳解】

設取出之三相異數為 a，b，c（$a<b<c$）

則排出之 6 個三位數為 abc，acb，bca，bac，cab，cba

總和 $=(2a+2b+2c)\times 100+(2a+2b+2c)\times 10+(2a+2b+2c)=222(a+b+c)$

依條件 $3500<222(a+b+c)<3700$，得 $a+b+c=16$

故有(1，6，9)，(1，7，8)，(2，5，9)，(2，6，8)，(3，4，9)，(3，5，8)，(3，6，7)，(4，5，7)

共 8 種取法

6.設 A 點在圓 $x^2+y^2=4$ 上移動，B 點在圓 $x^2+y^2=16$ 上移動，則所有 $\overline{AB}$ 中點所成圖形的面積 $=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】8π

【詳解】

設 $A(2\cos\alpha，2\sin\alpha)$，$B(4\cos\beta，4\sin\beta)$，$\overline{AB}$ 中點 $P(x，y)$

則 $x=\frac{1}{2}(2\cos\alpha+4\cos\beta)=\cos\alpha+2\cos\beta$，$y=\frac{1}{2}(2\sin\alpha+4\sin\beta)=\sin\alpha+2\sin\beta$

$\Rightarrow\quad x^2+y^2=(\cos\alpha+2\cos\beta)^2+(\sin\alpha+2\sin\beta)^2=5+4\cos(\alpha-\beta)$

$\because\quad -1\leq\cos(\alpha-\beta)\leq 1\quad\therefore\quad 1\leq x^2+y^2\leq 9$，圖形面積 $=9\pi-\pi=8\pi$

二、計算題 **40%**(每題 10 分)：

1.設 P 為橢圓 $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ 上一點，Q 點為(1，1)，求 $\overline{PQ}$ 長的最大值與最小值。

【解答】最大值 3，最小值 1

【詳解】

Γ：$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$，$\delta=8^2-4\times5\times5=-36<0$

(1)先作平移(h，k)使 $\begin{cases}10h+8k-18=0\\8h+10k-18=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=1\\k=1\end{cases}$

$\therefore$ (1，1)為橢圓Γ的中心，即 Q(1，1)為Γ的中心

(2)作(1，1)平移，得新方程式為 $5x'^2+8x'y'+5y'^2-9=0$

再作銳角θ 旋轉使 $\cot2\theta=\dfrac{5-5}{8}=0\quad\Rightarrow\quad\theta=\dfrac{\pi}{4}$

令旋轉後的新方程式為 $A'x''^2+C'y''^2-9=0$

則$\begin{cases}A'+C'=5+5=10\\A'-C'=\sqrt{8^2+(5-5)^2}=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A'=9\\C'=1\end{cases}$

得新方程式 $9x''^2+y''^2=9$，得標準式 $\dfrac{x''^2}{1}+\dfrac{y''^2}{9}=1$

(3)$\because$ Q 為中心，$P\in\Gamma$

$\therefore$ $\overline{PQ}$之最大值為長軸半長 $=3$，$\overline{PQ}$之最小值為短軸半長 $=1$

2.試求$(1+x)+3(1+x)^2+5(1+x)^3+\cdots+29(1+x)^{15}$展開式中，$x^4$ 項的係數。

【解答】110656

【詳解】

令 $S=(1+x)+3(1+x)^2+5(1+x)^3+\cdots+29(1+x)^{15}$

$\Rightarrow\quad(1+x)S=(1+x)^2+3(1+x)^3+5(1+x)^4+\cdots+27(1+x)^{15}+29(1+x)^{16}$

兩式相減得$-xS=(1+x)+2(1+x)^2+2(1+x)^3+\cdots+2(1+x)^{15}-29(1+x)^{16}$

$=(1+x)+\dfrac{2(1+x)^2[(1+x)^{14}-1]}{(1+x)-1}-29(1+x)^{16}$

$\Rightarrow\quad S=-\dfrac{1+x}{x}+\dfrac{2(1+x)^2-2(1+x)^{16}}{x^2}+\dfrac{29(1+x)^{16}}{x}$

$\therefore$ S 中 x^3 項的係數 $=-2C^{16}_6+29C^{16}_5=(-2)\cdot8008+29\cdot4368=110656$

3.三直線 $x-y-9=0$，$x+2y=0$，$3x-y-7=0$ 圍成一個三角形，求此三角形之外接圓方程式。

【解答】$x^2+y^2-4x+12y+15=0$

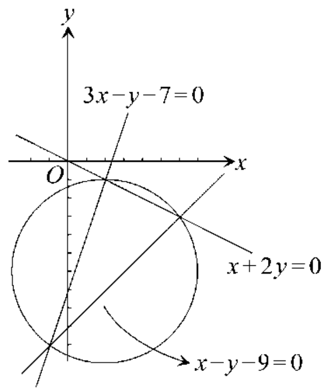
【詳解】

$x-y-9=0$……①；$x+2y=0$……②；$3x-y-7=0$……③

解①②得$(6,-3)$，解①③得$(-1,-10)$，解②③得$(2,-1)$

設此三角形的外接圓為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，因過$(6,-3)$，$(-1,-10)$，$(2,-1)$

$\therefore\quad \begin{cases}6d-3e+f+45=0\\-d-10e+f+101=0\\2d-e+f+5=0\end{cases}$，解之得 $d=-4$，$e=12$，$f=15$



4.設 $0\le x\le 2\pi$，解不等式$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2\cos x & \sqrt{3} & 5\\4\cos^2 x & 3 & 25\end{vmatrix}\ge 0$。

【解答】$\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{11\pi}{6}$

【詳解】

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2\cos x & \sqrt{3} & 5\\4\cos^2 x & 3 & 25\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\2\cos x-5 & \sqrt{3}-5 & 5\\4\cos^2 x-25 & 3-25 & 25\end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$=\begin{vmatrix}2\cos x-5 & \sqrt{3}-5\\(2\cos x-5)(2\cos x+5) & -22\end{vmatrix}=(2\cos x-5)\begin{vmatrix}1 & \sqrt{3}-5\\2\cos x+5 & -22\end{vmatrix}$$

$=(2\cos x-5)[-22-(\sqrt{3}-5)(2\cos x+5)]=(2\cos x-5)[2(5-\sqrt{3})\cos x+3-5\sqrt{3}]$
≥ 0

$\because\quad 0\le x\le 2\pi$，$-1\le\cos x\le 1\quad\therefore\quad 2\cos x-5<0\quad\therefore\quad 2(5-\sqrt{3})\cos x+3-5\sqrt{3}\le 0$

$\Rightarrow \quad \cos x \le \dfrac{5\sqrt{3}-3}{2(5-\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow$ 由下圖知：$\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{11\pi}{6}$