國立鳳新高級中學 103 學年度第一次教師甄選數學科試題

一、　填充題(每題 5 分，不須計算過程，只需標明題號及答案)

1. 用 3 枝 10 公尺長的竹竿，沿著河岸圍出一個等腰梯形。試求此等腰梯形的最大面積。
2. 擲一個不均勻硬幣，設出現正面的機率$\dfrac{2}{3}$，出現反面的機率$\dfrac{1}{3}$。現有一質點位在一數線上的原點，投擲此硬幣，當出現正面時，質點往正向一單位；出現反面時，質點往負向一單位，試問：持續投擲硬幣，質點能落在-1的機率？
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\dfrac{1}{n\times k}}\right)$
4. 設$\gamma=3+4i$，x之方程式$4x^2-2\gamma x+\gamma^2=0$的二根爲$\alpha,\beta$。若$\alpha,\beta,\gamma$在複數平面上所對應的點分別爲$A,B,C$，試求$\Delta ABC$之面積。($i$爲虛數單位)
5. 將 25 個相同的球全部放入 7 個不同的箱子中，但每個箱子只能放入 2 至 6 個球，試問多少種不同的放法？
6. 有 12 位小朋友坐成一排，然後 12 個人全部起立再重新入座，但規定每一位小朋友只可選擇原先的位置或者與原先位置相鄰的位置，試問這 12 位小朋友有多少種重新入座的方式？
7. 一袋子中有大小相同的 4 紅球，5 黑球及 6 白球。今逐次自袋中隨機取出一球，取後不放回，直至所有紅球皆取出後停止，若令X表停止時所取球次數之隨機變數，試求X之期望值。
8. 設$\triangle ABC$爲直角三角形，且$\angle BAC=90^\circ$，D爲$\overline{BC}$上一點，使得$\overline{AD}\perp\overline{BC}$。

   以$\overline{AD}$爲直徑作圓，過B,C兩點分別作此圓的切線（不同於$\overline{BC}$）交於Z點。

   已知$\overline{ZB}+\overline{ZC}=10$，求$\overline{BC}$

9.　二數列$\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$，$a_1=1,b_1=-1$，且$\begin{cases}a_{n+1}=a_n-2b_n\\ b_{n+1}=a_n+4b_n\end{cases},\forall n\in N$，求一般項$a_n$

10.　右圖所示的是巴斯卡三角形的第一列、第二列及第三列。 設$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$及$\langle c_n\rangle$分別表示巴斯卡三角形中第 1023 列、第 1024 列及第 1025 列中從左至右的數列，且每列最左邊的數記爲a_0,b_0,c_0，求: $\displaystyle\sum_{i=0}^{1024}\frac{b_i}{c_i}-\sum_{i=0}^{1023}\frac{a_i}{b_i}$

1　1
1　2　1
1　3　3　1

二、　計算證明題(每題 10 分，須計算過程)

11. 設$p>0$是一常數，過點$Q(2p,0)$的直線與拋物線$y^2=2px$交於相異兩點A,B，以$\overline{AB}$爲直徑作圓C，則當圓C的面積產生最小值時，求AB直線的方程式並證明之。

12. 設$[x]$表示不超過x的最大整數，$n\in N$，求:$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$(以$n$表示)　。

13. 證明: $a,b,c\in R,abc\neq 0,ax^2+2bx+c=0$，$bx^2+2cx+a=0$，$cx^2+2ax+b=0$三個方程式中至少有一個方程式有實根。

14. 設四面體$ABCD$，$\overline{AB},\overline{AC}$和$\overline{AD}$兩兩互相垂直。若點$A$在平面$BCD$之正射影點爲$H$，試證$H$爲$\Delta BCD$之垂心。

15. 空間座標系上三相異平面$E_1:a_1x+b_1y+c_1z=0$，$E_2:a_2x+b_2y+c_2z=0$，$E_3:a_3x+b_3y+c_3z=0$恰交於一點，且與另三個平面$E_4:a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，$E_5:a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，$E_6:a_3x+b_3y+c_3z=d_3$圍成一個平行六面體，

試證明平行六面體的體積爲$\left|\dfrac{d_1d_2d_3}{\Delta}\right|$，其中$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$。