

臺北市立陽明高級中學 103 學年度教師甄選高中數學科筆試試題

一、 填充題：48% (共 8 題，每題 6 分)

1. 設向量 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 滿足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ，且 $\vec{a} - \vec{c}$ 與 $\vec{b} - \vec{c}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$ ，則 $|\vec{c}|$ 的最大值為_____。
2. 已知 $0 < \theta < \pi$ ，若方程式 $x^2 - 4x \cos 2\theta + 2 = 0$ 的一個實根與方程式 $2x^2 + 4x \sin 2\theta + 1 = 0$ 的一個實根互為倒數，則 $\theta =$ _____。
3. 已知函數 $f(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{1-x^2}$ 在 $x = \alpha$ 時有最小值 m ，則數對 $(\alpha, m) =$ _____。
4. 若 $P(x, y)$ 與 $Q(m, n)$ 是關於直線 $y = 2x - 1$ 對稱的兩點，將 $Q(m, n)$ 繞原點旋轉 60° ，又得到 $R(X, Y)$ 。假設將 P 變換到 R 可用矩陣 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ 表示，則矩陣 $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} =$ _____。
5. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ 的反方陣「不」存在，且 $A + A^2 + \dots + A^n = kA$ ，其中 n 為正整數， k 為實數，求 $k =$ _____。(以 n 表示)
6. 已知橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的兩頂點 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 1)$ ，若直線 $y = kx$ ($k > 0$) 與直線 \overline{AB} 交於 P ，與橢圓 Γ 交於 E 、 F 兩點，則四邊形 $AEBF$ 面積的最大值為_____。
7. 已知函數 $f(x) = |\cos x|$ 的圖像與直線 $y = kx$ ($k > 0$) 恰有兩個交點，其中交點的橫坐標的最大值為 α ，求 $\frac{\sin \alpha}{\cos 3\alpha - \cos \alpha} =$ _____ (以 α 表示)。
8. 已知 $P(x, y)$ 在曲線 $x^2 + 2xy - 3y^2 = 2$ 上，求 $x^2 + y^2$ 的最小值為_____。

二、 計算證明題：52%

1. 請判斷下謝各小題是否正確，若正確者請說明，若為錯誤者請舉出一反例：
- (1) 若 $f(x) > 0$ 恆成立且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ 。(5%)
- (2) 若 $g(x)$ 在 a 點連續，且 $g(a)=b$ ， $\lim_{u \rightarrow b} f(u)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$ 。(5%)
- (3) 若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 處不可微分，則則函數 $h(x) = f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 處一定不可微分。(5%)
2. 只由三個字母 a, b, c 所組成長度為 n 的字串在通訊管道上傳輸，要求在傳輸中不可以有兩個 a 連續出現在任一字串中。令 a_n 是長度為 n 的字串時，傳輸中的字串個數，則：
- (1) 求 a_1, a_2, a_3 之值。(3%)
- (2) 寫出 a_n 的遞迴式。(3%)
- (3) 求 a_n 的一般式(4%)
3. 已知實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x^2) = f(x+1)f(x-1)$ ，證明方程式 $f(x) = 0$ 無實根。(9%)
4. 設 a_1, a_2, \dots 是等差數列且 $a_1 > 1$ ，公差 $d > 0$ ，
證明：對所有自然數 n ， $\log_{a_n} a_{n+1} > \log_{a_{n+1}} a_{n+2}$ 。(9%)
5. 設 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，且是 $\triangle ABC$ 的外心，
證明： $\sin 2A \overrightarrow{PA} + \sin 2B \overrightarrow{PB} + \sin 2C \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 。(9%)