國立嘉義高級中學 103 學年度第 1 次教師甄選—數學科試題

一、填充題(每格 5 分，共 75 分)

1. 若 z 為複數，且滿足 $z+\frac{1}{z}=1$，則 $z^{103}+\frac{1}{z^{103}}=$_______。

2. 一個正四面體的各稜邊長皆為 6，則此四面體的體積為_______。

3. 在空間中，點 A(1,2,－1)在直線 L: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-6}{1}$ 的投影點的坐標為_______。

4. 有 n 個人玩擲骰子的遊戲，每個人都擲兩個公正的骰子。若要使「至少有一人擲出兩骰子都是 1 點」的機率高於 50% ，則 n 至少是_______。(註:log2≈0.3010，log3≈0.4771，log7≈0.8451)

5. 設 $a_n=1+2+3+.....+n$，n 為自然數，則無窮級數 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$ 之和為______。

6. 設 a,b,c 三數滿足$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=12 \\ a^3+b^3+c^3=31 \end{cases}$ 且 a>b>c，令 f(x)=(x－a)(x－b)(x－c)=0，則序組(a,b,c)=______。

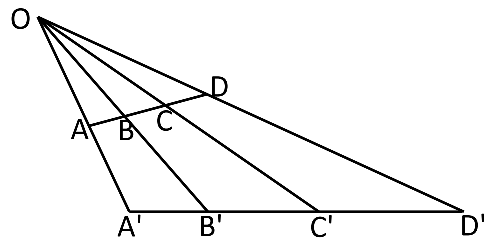
7. 若α、β為 $x^2-x-1=0$ 的二根，令 $P_n=\alpha^n+\beta^n$ (n=1,2,3,....)， 則 P_9 的值為_______。

8. 若$\overline{AB}$為橢圓 $4x^2-4x+y^2-8=0$ 的一弦，且$\overline{AB}$之中點為(1,1)，則直線 AB 的方程式為_______。

9. 若 x 是非零實數且 $m=\frac{3x^4+1}{4x^3}$ ，則 m 的範圍為_______。

10. 如圖(一)，點光源 O 將 $\overline{AD}$投影到$\overline{A'D'}$，且$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=1$，

 若$\overline{A'B'}=3$，$\overline{B'C'}$=5，則$\overline{C'D'}$=______。



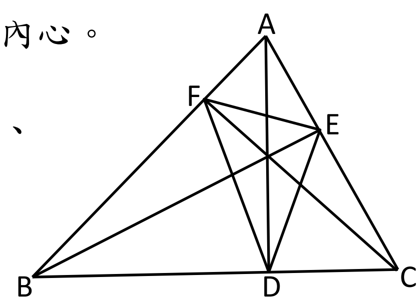
圖(一)

11. 在△ABC 中，$\overline{AC}=5$、$\overline{AB}=7$、$\overline{BC}=8$，P 為任意一點，則$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$的最小值為______。

12. 已知銳角三角形的三高交點為垂心，而此垂心是三個垂足點所成三角形的內心。

 如圖(二)，在△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CF}\perp\overline{AB}$，且$\overline{AC}=5$、$\overline{AB}=7$、

 $\overline{BC}=8$，則△DEF 之周長為______。



圖(二)

13.在坐標平面上有五個點 $P_1(1,1)$、$P_2(2,\frac{1}{2})$、$P_3(3,\frac{1}{3})$、$P_4(4,\frac{1}{4})$、$P_5(5,\frac{1}{5})$。

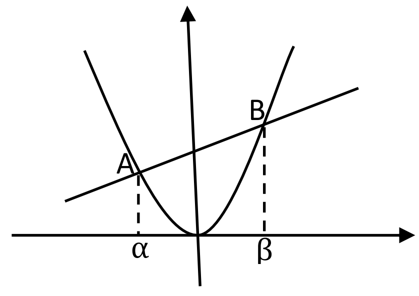
(1)請用拉格朗日(Lagrange)插值法找一個四次函數 y=f(x)通過上述五個點來估計 f(6)的值

 為_______。

(2)請對上述五個點，以最小平方法求得的最佳直線來求 $P_6(6,t)$，則 t 的值為_______。

x	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	t

14. 如圖(三)，設 A(α,α^2)，B(β,β^2)在拋物線 $y=x^2$ 上移動，若直線 AB 和拋物線所圍面積為定值$\frac{4}{3}$，則$\overline{AB}$的中點的軌跡方程式為_______。



圖(三)

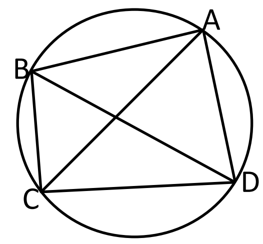
二、計算及證明題(共 25 分)

1. 試求滿足 103x+17y=2014 的所有正整數解及一般整數解。 (10 分)

2.已知托勒密(Ptolemy)定理：

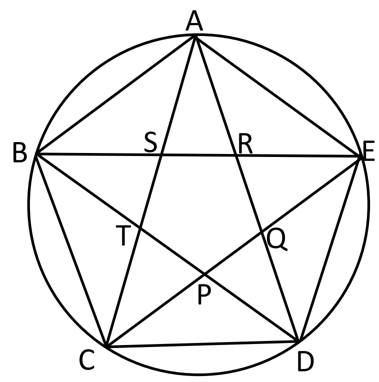
若 A、B、C、D 四點依次構成一個圓內接四邊形，

則$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$。(如圖(四))



圖(四)

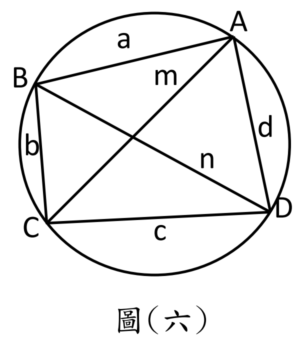
(1)如圖(五)，給定正五邊形 ABCDE，$\overline{AB}=1$，則由五對角線所圍成正五邊形 PQRST 的面積是正五邊形 ABCDE 的面積的幾倍?(化成最簡比) (5 分)



圖(五)

(2)如圖(六)，圓內接四邊形 ABCD 中，設$\overline{AB}=a$、$\overline{BC}=b$、$\overline{CD}=c$、$\overline{DA}=d$、$\overline{AC}=m$、$\overline{BD}=n$，

試證：$\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$。 (10 分)



圖(六)