

新北市立高級中等學校 103 學年度教師聯合甄選
數學科答案

一、選擇題：15%，每題 5 分

1.	2.	3.
D	A	C

二、填充題：45%，每題 5 分

1. $y = \frac{2}{5}x$

2. $r = \frac{15}{7}$

3. $\frac{1}{4}$

4. $\frac{3}{4}$

5. 159

6. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

7. 210

8. $\left(\frac{4}{77}, \frac{82}{77}, -\frac{71}{77}\right)$

9. $\frac{1}{2}$

三、計算題：40%，每題 8 分

1. 因為 x^3y^2 為 6 位數，所以 $10^5 \leq x^3y^2 < 10^6$ ，又因為 $\log x^3y^2$ 不是整數，所以 $10^5 < x^3y^2 < 10^6$ ，即 $5 < \log x^3y^2 < 6$ 。將 $\log x^3y^2$ 展開，得 $5 < \log x + 2(\log x + \log y) < 6$ 。.....①

因為 $\log x \geq 0, \log y \geq 0$ ，所以 $0 \leq 2(\log x + \log y) < 6$ ，推得 $0 \leq \log x + \log y < 3$ 。

因為題意告訴我們 $\log xy$ 為整數，所以 $\log x + \log y = 0, 1$ 或 2

分情況討論如下：

- (1) 當 $\log x + \log y = 0$ 時，因為 $\log x \geq 0, \log y \geq 0$ ，所以 $\log x = \log y = 0$ ，

此與題目所要求的 $\log x, \log y$ 不為整數互相矛盾。

(2) 當 $\log x + \log y = 1$ 時，由①得 $5 < \log x + 2 < 6$ ，推得 $3 < \log x < 4$ ，即 $-3 < 1 - \log x < -2$ 。

再由 $\log x + \log y = 1$ 知， $-3 < \log y < -2$ ，此與 $\log y \geq 0$ 互相矛盾。

(3) 當 $\log x + \log y = 2$ 時，由①得 $5 < \log x + 4 < 6$ ，推得 $1 < \log x < 2$ ，即 $10 < x < 100$ 。再由 $\log xy = \log x + \log y = 2$ 知， $xy = 10^2 = 100$ ，綜合得到

$$\begin{cases} 10 < x < 100 \\ xy = 100 \end{cases}, \text{推得 } 1 < y < 10.$$

因為 y 為整數，所以將 $y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 逐一代入 $xy = 100$ ，解得

$$(x, y) = (50, 2), (25, 4), (20, 5)$$

綜合(1)(2)(3)，總共有 3 組解，分別為 $(x, y) = (50, 2), (25, 4), (20, 5)$ 。

2. 略

3. 一條直線。其方程式為 $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}$ 。

4. $N = 215$, $a_N = a_{215} = 2009$ 。

5. 美式比較短，證明如下：

(1) 美式鞋帶長度： $g + 2(n-1)\sqrt{d^2 + g^2}$ 。

(2) 鞋店式鞋帶長度： $(n-1)g + (n-1)\sqrt{d^2 + g^2} + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + g^2}$ 。

(3) 我們想證明：鞋店式鞋帶長度公式 \geq 美式鞋帶長度公式，其推導如下。

$$(n-1)g + (n-1)\sqrt{d^2 + g^2} + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + g^2} \geq g + 2(n-1)\sqrt{d^2 + g^2},$$

透過移項，即證明不等式

$$(n-2)g + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + g^2} \geq (n-1)\sqrt{d^2 + g^2}$$

成立。

將兩邊分別平方，得不等式

$$(n-2)^2 g^2 + 2(n-2)g\sqrt{(n-1)^2 d^2 + g^2} + ((n-1)^2 d^2 + g^2) \geq (n-1)^2 (d^2 + g^2)$$

移項整理，得不等式：

$$2(n-2)g\sqrt{n^2 d^2 + g^2} \geq 2(n-2)g^2,$$

消去 $2(n-2)g$ (利用 $n \geq 2$) 得不等式：

$$\sqrt{(n-1)^2 d^2 + g^2} \geq g,$$

因為 $\sqrt{(n-1)^2 d^2 + g^2} \geq \sqrt{g^2} = g$ ，所以最後的不等式一定成立，

也就是說，

鞋店式鞋帶長度 \geq 美式鞋帶長度。