

一、填充題 (每題 6 分 共 60 分)

1. $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^6$ 的 x^{15} 項係數
2. $y = \frac{2}{x+1}$, $5x - 3y = 8$ 和 y 軸所形成的封閉區域繞 x 軸旋轉的體積
3. 已知平面上兩直線 $L_1: x + y - 1 = 0$, $L_2: 2x - 3y + 6 = 0$, 透過二階方陣 A 變換之後為 $L_1': 2x - 3y - 6 = 0$, $L_2': 5x + 4y - 6 = 0$, 試求二階方陣 A
4. $x^3 - 8x^2 - kx - 6 = 0$ 有三相異實根, 求 k 的範圍
5. 已知 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$, 試求 $f(\theta) = \cos \theta + \frac{9}{\cos \theta}$ 之最小值
6. 『人生如夢, 夢如人生』 8 個字排成一列, 人和夢不相鄰的方法數
7. 若 $0 \leq x < 2\pi$, 已知方程式 $3\sin x - 4k \cos x + (3 + 8k) = 0$ 的 x 有 2 相異實根, 求 k 的範圍
8. $y = f^{-1}(x)$ 是 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$, $a > 1$ 之反函數, 試求 $f^{-1}(x) > 1$ 的 x 的範圍 (以 a 表示)
9. 已知 Z_1, Z_2 為複數面上坐標 P_1, P_2 , $O(0,0)$, $a \in R$, 且 $\frac{Z_1 - a}{Z_1 + a}$ 為純虛數, 若 $3Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + 2Z_2^2 = 0$, 試求 ΔP_1OP_2 的面積
10. 已知一圓柱體的半徑為 6 , 有一平面 E 與圓柱夾 30° 且通過圓柱直徑, 試求平面 E 與圓柱所截兩塊體積中較小的體積

二、計算題

1. 三角錐 $OABC$, 已知 $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, 且 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 兩兩互相垂直, 由 O 作垂線交 ΔABC 於 H , 且 $\overline{OH} = h$, 證明:
(1) H 為 ΔABC 的垂心 (5 分) (2) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$ (5 分)
2. 證明: 3 次實係數方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的圖形對稱於反曲點 (10 分)
3. (1) 何謂雙曲線的光學性質 (3 分) (2) 證明雙曲線的光學性質 (7 分)
4. 若 $n \geq 2$, 證明: $\frac{4}{7} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (10 分)
5. 已知一大樓有 2^{10} 層樓, 第 i 層樓有 i 個窗戶, 已知某一層樓相鄰兩窗皆打開或皆關閉, 則下一層樓的相對應窗戶打開, 若某一層樓相鄰兩窗為一開一閉, 則下一層樓的相應窗戶關閉, 若最後一層有 $2^9 + 1$ 個窗戶打開, 證明: 第一層樓的窗戶必關閉。 (10 分)
6. 菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 若 E 在 \overline{CD} 上, 延長 \overline{BC} 於 F , 延長 \overline{BE} 交 \overline{DF} 於 G , 已知 $\overline{BG} = a$:
(1) 證明 $BCGD$ 四點共圓 (5 分) (2) 以 a 表示四邊形 $BCGD$ 的面積 (5 分)