

國立臺中第二高級中學 103 學年度第一次教師甄選

數學科試題

一、填充題（每題 5 分）

1. 將 30 顆相同的乒乓球放入紅、黃、藍、綠四個箱子，每個箱子裡都要有球，且紅、黃兩個箱子裡的球皆要奇數顆，則有 (1) 種不同的放法。

2. 某次數學測驗，總分 100 分，其中選擇題占 60 分，計算題占 40 分。

甲班學生選擇題、計算題的平均分數與標準差如右表：

	選擇題	計算題
平均分數	52 分	18 分
標準差	8 分	15 分

若該班選擇題成績與計算題成績的相關係數為 0.6，則甲班學生數學測驗成績的標準差為 (2) 分。

3. 已知 $z = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $\sum_{k=1}^{\infty} |z^{k+1} - z^k| = \underline{(3)}$ 。

4. 設有一奇數 n 以及角度 θ ，使得聯立方程式
$$\begin{cases} 3^n y + (\sin 2\theta)^n z = 0 \\ (1 + \sec \theta)^n x + z = 0 \\ -x + (1 + \csc \theta)^n y = 0 \end{cases}$$
 的解 (x, y, z) 不只一組，

則 $\sin \theta + \cos \theta$ 為 (4)。

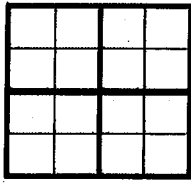
5. 設 $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$ ，則方程式 $\cos 4x + 2\sin^2 \frac{y}{2} = 1$ 之圖形所圍成的區域面積為 (5)。

6. 已知 $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=0, a^3+b^3+c^3=8$ ，則 $a^9+b^9+c^9 = \underline{(6)}$ 。

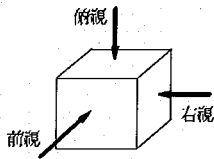
7. 求極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + n \cdot \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right) = \underline{(7)}$ 。

8. 已知平面上一點 $F(3, 2)$ 及一直線 $L: y = -4$ 。設動點 $P(x, y)$ 滿足 $\overline{PF} + d(P, L) = 10$ 且點 P 與 F 在直線 L 的同側，則所有動點 P 所形成的軌跡方程式為 (8)。

9. 4 乘 4 的數獨是用 1,2,3,4 填入 4 乘 4 的方格中(如下圖)。每一行及每一列都須包含 1~4，不能缺少也不能重複，粗線圍起來的區域(正方形的 4 格)也是填入 1~4，不能缺少也不能重複。今將 1~4 填入這 16 格且要符合上述規則，則共有 (9) 種不同的方法。

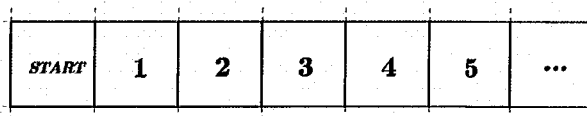


10. 木匠師父把一個邊長 2 公分的正方體，雕琢成一個實心的物體，由上方俯視為邊長 2 公分的正方形，前視圖及右視圖皆是半徑 1 公分的圓，則此物體的最大體積為 (10) 立方公分。



二、計算題(每題 10 分)

- 在空間坐標中，設集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ，點集合 $S = \{(x, y, z) | x, y, z \in A\}$ 。則以 S 內的元素為頂點，共可作出多少個正三角形？
- 設 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ ，證明： $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$
- 如下圖，力宏玩大富翁，若由 *START* 出發，擲一公正骰子決定前進的步數，在不走到第 2 格的條件下，求走到第 3 格或第 4 格的機率為何？



- 甲袋裝有 1 個黑球和 $(k-1)$ 個白球，而乙袋裝有 k 個白球 ($k \geq 2$)。今從甲袋與乙袋同時各取出一球放入對方袋中，這動作稱為換球一次。對每個正整數 n ，令 P_n 表示換球 n 次後，黑球仍在甲袋的機率。

試求：(1) P_n (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$

- 已知對數 $\log \sqrt{x}$ 的首數為 p ，對數 $\log \frac{10}{x}$ 的首數為 q ，求：

(1) $2p^2 - q^2$ 的最大值

(2) 當 $2p^2 - q^2$ 有最大值時，所有的 x 所成的集合