台北市立內湖高工 103 學年度數學教師甄選筆試試題

一、填充題 50%（每格 5 分）

1. 求 $\int_0^4 |x-\sqrt{16-x^2}|\,dx=$ ＿(1)＿。
2. 若以方程式 $x^3=4-4\sqrt{3}i$ 三根畫在複數平面上，則以此三點為頂點所形成三角形的面積為＿(2)＿。
3. 已知平面上三點 $A(3,-5)$、$B(4,3)$、$P(103,2014)$。若 C 點滿足 $\overrightarrow{PC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$，則 C 點坐標為＿(3)＿。
4. 設 a,b,c 為正數。若 $a^b=1,b^c=\frac{1}{3},c^a=\frac{1}{2}$，則 $abc=$ ＿(4)＿。
5. 已知斜率為 2 的直線與圓 $x^2+y^2=16$ 相切，則此直線與坐標軸所圍成三角形的面積為＿(5)＿。
6. 已知 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，求 $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=$ ＿(6)＿。
7. 若兩拋物線 $x^2+6x+y+9=0$ 與 $4x^2+24x-y+37=0$ 上各取一個點，則兩點距離的最小值為＿(7)＿。
8. 不等式 $\frac{2x^2-4x-6}{x^2-x-2}\le 1$ 的解為＿(8)＿。
9. 已知 $\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$。若 $\log A=-2.2219$，則 $A=$ ＿(9)＿。
10. 已知平面上不共線三點 A、B、C。若 P 為 ΔABC 內一點，滿足 $\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，則三角形面積的比 $\Delta PAB:\Delta PAC:\Delta PBC$ 為＿(10)＿。

二、計算題，無計算過程不給分。40%（每題 10 分）

1. 求方程組 $\begin{cases}29x-11y+5=0\\43x+23y+31=0\end{cases}$ 的解。
2. 求 $C_0^9+\frac{1}{2}C_1^9+\frac{1}{3}C_2^9+\frac{1}{4}C_3^9+\frac{1}{5}C_4^9+\frac{1}{6}C_5^9+\frac{1}{7}C_6^9+\frac{1}{8}C_7^9+\frac{1}{9}C_8^9+\frac{1}{10}C_9^9=?$
3. 求 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x-1}$ 的相對極大值及相對極小值。
4. 已知平面上三點 $A(-2,4),B(1,2),C(-3,-2)$ 形成 ΔABC。求 $\tan A=?$

三、證明題 10%

1. 自一平均為 μ、變異數為 σ^2 之母體取出一組隨機樣本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$。請證明樣本變異數

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$ 為母體變異數為 σ^2 的不偏估計量。

(即證明 s^2 的期望值為 σ^2)其中 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ 為樣本平均。