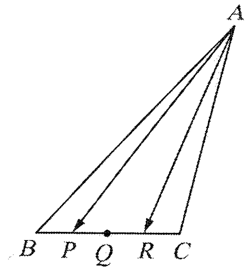
國立彰化高級中學103學年度第一次教師甄選【數學科】試題

※請作答於答案卷上，需有計算過程否則不予計分※

※題號1~13，每題5分；題號14~18，每題7分。※

1. 如下圖所示，在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CA}=6$，

   且P，Q，R為$\overline{BC}$的四等分點，則$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=$__________。



2. 設n為自然數，$(2+\sqrt{5})^n=x_n+y_n\sqrt{5}$，其中$x_n,y_n$為正整數，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$之值為__________。

3. 將自然數按下表的方式排列，從上到下第i列,從左至右第j行的數記為f(i,j),例如f(3,4)=18,試求f(45,45)=________。

1	2	4	7	11	16	22	…
3	5	8	12	17	23	…	
6	9	13	18	24	…		
10	14	19	25	…			
15	20	26	…				
21	27	…					
28	…						
…							

4. $f(x)=2x^4-2x^3+6x^2-9x+8$，則$f(\sqrt[3]{2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}})=$__________。

5. 複數平面上，點A,B,C分別對應到複數$z_1,\ z_2,\ z_3$，若$|z_1+3i|=|z_1-2-i|$，

   $z_2=z_1\cdot(-1+\sqrt{3}i)$，$z_3=z_1\cdot 4i$，則$\Delta ABC$的最小面積為__________。(請化為最簡根式)

6. 空間中，平面$E:x+2y+2z=9$將球面$S:x^2+y^2+z^2=25$的內部分成兩部分，其中體積較小的部分稱為球冠，此球冠的體積為__________。

7. 有三個水桶A,B,C，其含水量分別為a,b,c。現在依$A\to B\to C\to A\to B\to C\to A\to$......的順序，將前一個水桶的水倒一半至後一個水桶。規定每一回合為$A\to B\to C\to A$，若n回合後會趨近平衡狀態，則其平衡狀態時，水桶A中的水量為何？(試以a,b,c表示)

8. $|\log_2 x|=ax+b$有三相異解，且這三個解的比為$1:2:3$，試求數對(a,b)的值。

9. 設 $\overline{AB}=2$，在以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓上有動點 P，記 $\overline{AB}$ 的中點為 O，$\angle PAO=\theta$。

從點 B 向 $\overleftrightarrow{OP}$ 作垂線,垂足記為 M。當 θ 在 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 範圍內變化時，ΔOBM 的面積記為 S_1，ΔABP 的面積記為 S_2，求以 θ 表出 $S_1,\ S_2$ 。(對其中一個得 3 分，全對得 5 分)

10. $a\in R$，f(x)=$2x^3-3(a+1)x^2+6ax-3a$ 若 f(x)=0 有三個相異實根,
試求 a 的範圍為________________

11. $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\a_2x+b_2y+c_2z=0\\a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$ 表三相異平面,(2,3,4)為其一交點,

若 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 亦表三相異平面,(3,4,7)為其一交點,

試問方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 之解為____________________

12. 已知 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in\{-1,0,1\}$，試問 $a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3+3^4a_4+3^5a_5$ 的值為正整數者，

共有____________個。

13. 試求 $\left[\frac{10^{2001}}{10^{667}+2002}\right]$ 的末四位數,其中 [x] 表示小於或等於 x 的最大整數?

14. 在箱中放著七張卡片，其上編有從 1 到 7 的數字，每張有一個各不相同的數字。
從箱中隨意地取出 1 張卡片，再放回箱中，這樣的試驗反覆進行 n 次，並記 n 次取出的卡片上數字的總和為 S_n，設 S_n=4k+1 (k 是整數) 的機率為 P_n，求用 P_n 表出 P_{n+1} 。

15. 設 ΔABC 之三邊長為 $\overline{AB}=3,\overline{BC}=4,\overline{CA}=5$，若$\Delta$ABC內部一點 P 到 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 三邊之距離依次為 x，y，z 求行列式 $\begin{vmatrix}x^2+2 & \mathrm{yx} & \mathrm{zx}\\ \mathrm{xy} & y^2+2 & zy\\ \mathrm{xy} & yz & z^2+2\end{vmatrix}$ 之最小值為_______________。

16. 若 $\begin{cases}a+b=1\\ax+by=-1\\ax^2+by^2=-5\\ax^3+by^3=-13\end{cases}$，求 ax^5+by^5 之值為________。

17. 若 s 和 t 為任意實數,則$(s+7-5|\cos t|)^2+(s-3|\sin t|)^2$之最小值為________

18. 設圓的內接 12 邊形有六條邊長為 a，六條邊長為 b，則此 12 邊形的面積為_____________。
(試以 a,b 表示)

本試題結束，辛苦各位老師!