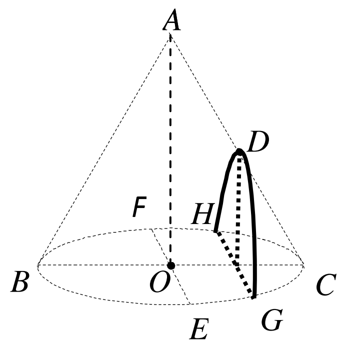
臺北市立中正高級中學 103 學年度第 1 次專任教師甄選數學科試卷

一、填充題：(每題四分)

1. 小新數一數存錢筒內的錢幣：5 元的有 a 個，10 元的有 b 個，50 元的有 c 個，他又發現 a 、 b 、 c 為相異的質數而且 $(a+b)b=c+120$ 。請問小新的存錢筒內共有多少元？
2. 若 $0^\circ<\theta<180^\circ$ 且 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3+2\sqrt{2}$ ，令函數 $f(x)=(\log_2\dfrac{x}{2\sin\theta})(\log_4\dfrac{x}{4\sin\theta})$ ，求此函數的最小值？
3. 已知有五個正整數，其算術平均數為 14，全距為 20，中位數與眾數皆為 10，求此五數中第二大的數之可能值有多少個？
4. 數學競賽共有三題 A、B、C 難題，今有 25 位數學高手參加競賽，每位學生至少都能解出一題。在沒解 出 A 的學生中，解出 B 的人數是解出 C 的人數的 2 倍；只解出 A 的人數比其餘解出 A 的人數多 1；只解出一題的學生中，有一半不能解出 A。試求只解出 B 的人數？
5. 假設 ΔABC 中， $\overline{AB}=9$ 、 $\overline{BC}=7$ 、 $\overline{CA}=8$ ，且 ΔABC 的內切圓與其三邊分別切於 A' 、 B' 、 C' ，試求 $\Delta A'B'C'$ 的面積為何？
6. 假設 ΔABC 中， $\angle A=60^\circ$ ，周長 20，內切圓半徑為 $\sqrt{3}$ ，試求外接圓面積為何？
7. 右圖為一直圓錐， ΔABC 為邊長是 6 的正三角形， $\overline{AD}=\overline{CD}$ ，底圓的圓心為 O，直徑為 $\overline{EF}$ ，且 $\overline{AO}\perp\overline{BC}$ 。今一平行 $\overline{AO}$ 且垂直 $\overline{BC}$ 的平面過 D 點與直圓錐形成截痕。求此截痕的正焦弦長？



8. 若 $x\in\mathbb{R}$ ，求函數 $y=\dfrac{\sin 5x}{\sin x}$ 的最小值為何？
9. 由 1 到 50 的連續整數中，任意取出相異兩整數 a 、 b ，試求 $|a-b|$ 的期望值為何？
10. 一袋中有寫著 2、4、6、8、10 的卡片各一張，自袋中隨機取卡片兩次，一次取一張，以隨機變數 $\overline{X}$ 表示兩次的號碼樣本平均數，若取後不放回，求變異數 $Var(\overline{X})$ ＝？
11. 將一正立方體的六面著色，最多可用三色(黃、綠、紅)，則共有多少種不同顏色的立方體？
12. $y=f(x)=1-x^2$ 與直線 $x=0$ ， $x=1$ 及 $y=0$ 所圍成區域為 R ，而 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 為 $[0,1]$ 的 n 等分切割。以 $f(x_k)$ 及 $f(x_{k-1})$ 為上、下底，高為 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ 的梯形面積為 A_k ，設 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$ ， $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ ，若欲使 $|T-T_n|<\dfrac{1}{100}$ ，則 n 的最小正整數值為何？
13. 化簡 $\dfrac{1+\sin 6^\circ+\cos 12^\circ}{\cos 6^\circ+\sin 12^\circ}$ ＝？

二、計算題：(每題八分)

1. 假設 $x^{12}+7x^{11}+1=0$ 有 x_1、x_2、⋯、x_{12}，12 個根，試求 $\prod_{k=1}^{12}(x_k^2-x_k+1)=$ ？

2. $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，則方程式 $\frac{1}{2}\left[x^2+x\right]=3x+10$ 的實數解 x 為何？

3. 國民黨、民進黨、親民黨可自由派人參加 7 人會議，已知一排座位 7 人皆坐滿，且國民黨與民進黨均不相鄰而坐，請問共有多少種不同坐法？(例：國國國國國國國，國親國國親民民　都算一種坐法)

4. 設 a 為實數且 $0\le x\le 2\pi$，已知 x 的方程式 $\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x=a$ 有四個相異的實根，請列出此方程式四根和的所有可能值？

5. 若 $(0.\overline{01})^2=0.\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0}$，其中 $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，最短循環節長度為 n，

   求(1) $n=$ ？　(2) $a_0=$ ？

6. 有一道題目如下：

用一塊寬 3 公尺長 8 公尺的白鐵板，先在四個角落各截去相同大小的正方形，然後摺起四邊焊接起來，形成一無蓋的長方體蓄水箱，求此水箱的最大容積？

一位上完高三數學課程學生解題方法如下：

令截去的正方形邊長 x 公尺，此時水箱底部的長、寬分別為 $(8-2x)$ 公尺 $(3-2x)$ 公尺，高為 x 公尺，故水箱體積為 $x(8-2x)(3-2x)$ 立方公尺 依算幾不等式 $\frac{4x+(8-2x)+(3-2x)}{3}\ge\sqrt[3]{4x\cdot(8-2x)(3-2x)}\Rightarrow\frac{1331}{27}\ge 4x\cdot(8-2x)(3-2x)$ $\therefore x(8-2x)(3-2x)\le\frac{1331}{108}$，因此最大容積為 $\frac{1331}{108}$ 立方公尺

請說明此學生的錯誤，且修正此算幾不等式的解法並提出其他解法？

臺北市立中正高級中學 103 學年度第 1 次專任教師甄試數學科答案卷

一、填充題：（每格 4 分，共 52 分）

1. **1270**	2. $\frac{-1}{8}$	3. **7**	4. **6**	5. $\frac{20\sqrt{5}}{7}$
6. $\frac{49\pi}{3}$	7. $\sqrt{3}$	8. $\frac{-5}{4}$	9. **17**	10. **3**
11. **57**	12. **5**	13. $\sqrt{3}$		

二、計算證明題：(每題 8 分)

1.