

國立台灣師大附中 103 學年度教師甄試數學科筆試 (題目卷)

一、填充題(每題 5 分，共 60 分)

1. 從 1,2,3,4,5,6,7,8,9 中任取相異三數，則中位數大於 5 之機率為_____。

2. 已知 $f(3)=2$, $f'(3)=-5$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{xf(3)-3f(x)}{x-3} =$ _____。

3. 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，則其反矩陣 $A^{-1} =$ _____。

4. 化簡 $f(x) = \frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{5})} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$
 $+ 5 \cdot \frac{(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} =$ _____。

5. 一袋中有 1~7 號球各 1 顆，每次隨機取出一球紀錄號碼後放回，試求取出 n 次後，球號和為偶數的機率為_____。

6. 設 $A(1,0,3)$, $B(5,0,4)$ ，點 P 在平面 $E: x+2y-2z=2$ 上移動，則 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 的最小值為_____。

7. 解不等式 $(103^{2-x} - 103)(4^x - 9 \cdot 2^{x-1} + 2) \geq 0$ 得_____。

8. 民調公司進行某候選人的支持度調查，在 95% 的信心水準下得到支持度的信賴區間為 $[0.76, 0.84]$ ，後來發現有誤，其中不支持該候選人的 64 位被誤記為支持，試求真正的信賴區間為_____。

9. 求 $\sqrt[3]{103-x} + \sqrt[3]{x-21} = 2$ 的所有實數解為_____。

10. 設 $\triangle ABC$ 之內切圓半徑為 3，外接圓半徑為 7，內切圓切三邊於 D, E, F ，則 $\frac{\triangle DEF \text{ 的面積}}{\triangle ABC \text{ 的面積}} =$ _____。

11. 空間直角坐標系中， $A(1, 0, 1)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 0, 1)$ ，動點 P 滿足 C 到 $\triangle ABP$ 所在平面的垂足恰為 $\triangle ABP$ 的垂心，則動點 P 的軌跡方程式為_____。

12. 有從一年級到六年級的兒童各一人，排成一列領取糖果。如果一個高年級的兒童站在低年級的兒童前面，那麼高年級兒童後面所有比他年級低的兒童都會各有一次“怨言”。在一種排列順序裡，我們把所有“怨言”的總數叫“怨言數”。

(註：一個人可以有兩次以上的“怨言”。)

例如：下面的排列，其“怨言數”就是4。

(前) “怨言”

1 年級生 0 次

4 年級生 0 次

3 年級生 1 次

2 年級生 2 次

6 年級生 0 次

5 年級生 1 次

“怨言數” 4 次

問：“怨言數”為5的兒童排列順序有_____種。