臺灣省北區九十三學年度高級中學數學及自然科能力競賽數學科複賽試題及參考解答

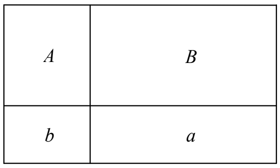
國立臺灣師範大學　數學系

《試題部分》

壹、第一區（花蓮區）

一、筆試（一）

【問題一】：如下圖



利用鉛直線與水平線將矩形分割成面積依序爲 A,a,B,b 的四個矩形。

1.在何條件下，A,a,B,b 會滿足

$$a+A=b+B$$

3.在何條件下，A,a,B,b 會滿足

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$$

4.在何條件下，A,a,B,b 會滿足

$$A-a=B-b$$

5.在何條件下，A,a,B,b 會滿足

$$a\,A=b\,B$$

(16 分)

【問題二】：試找出一個能刻劃出所有滿足 $\frac{23}{41}<\frac{a}{b}<\frac{32}{57}$ 的最簡分數 $\frac{a}{b}$ 的通式。滿足條件 $\frac{23}{41}<\frac{a}{b}<\frac{32}{57}$ 中分母最小的一個最簡分數爲何？證明你的答案。(16 分)

【問題三】：設 a_n, b_n 均爲等差數列，前 n 項之和分別爲 A_n, B_n，如果對於每個 n 均有 $\frac{A_n}{B_n}=\frac{3n-3}{2n+3}$，試求 $\frac{a_{16}}{b_{16}}$ 之值爲何？(17 分)

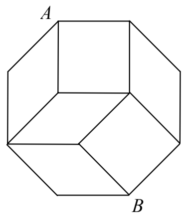
二、筆試（二）

1.設 N 爲自然數所成之集合，定義函數 f :N→N 爲

$$f(n)=\begin{cases} n+3, & n \text{ 爲奇數；} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ 爲偶數.} \end{cases}$$

若 k 爲奇數且滿足 $f(f(f(k)))=27$，求 $k=$ ___（一）___。

2.如下圖所示，由兩個全等的正方形與四個一樣的平行四邊形所鋪成的八邊形爲正八邊形。若正方形的邊長爲１，則對角線 AB 的長度爲何？___（二）___。



3.設不論 m 的值爲何，直線 y=mx＋b 均與圓錐曲線 $x^2+2y^2=8$ 相交，則 b 的範圍爲 ___（三）___。

4.牛奶保鮮時間因儲藏時的溫度不同而不同。若牛奶放在０℃的冰箱中，保鮮時間是 200 小時，而在 24℃的廚房中是 25 小時。假定保鮮時間 y（小時）與儲藏溫度 x（℃）的函

數關係是 y＝a・b^x（a,b是常數)。求溫度在 32℃時的保鮮時間。

答：　（四）　小時。

5.設 a 為正數，$f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$，則

$f(\frac{1}{2004})+f(\frac{2}{2004})+...+f(\frac{2003}{2004})$ 之值為

　（五）　。

6.正四面體的容器裝了一些水，當正四面體的一個面放置於水平桌面時，容器內水高為容器高的$\frac{1}{2}$，現將它上下倒置後水位高為容器高的　（六）　倍。

7.根據愛因思坦的相對論，在高速運動的物體上，當地球上過去 1 秒時，高速運動的太空船才只過去了$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$秒，這裡的常數$c$是光的速度，其值為$c$＝30(萬公里／秒)；而$v$(萬公里／秒)是太空船的速度。一位 28 歲的太空人，搭乘速度為 28.8（萬公里／秒）的太空船飛向外太空，出發當天，太空人的太太剛好產下他們的第一個孩子。當太空船返回地球時，發現他們的孩子剛好 50 歲。問：此時太空人的年紀幾歲？答：　（七）　歲。

貳、第二區（台北區）

一、筆試（一）

【問題一】：設a,b,c為某三角形之三邊長，試證：

$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$。（16 分）

【問題二】：在△ABC 中，點D在$\overline{AB}$上且$\overline{AD}=2\overline{BD}$，又點 E 是 $\overline{AC}$ 的中點。若$\angle ACD=\angle BEC$，試證：△ABC 是直角三角形。（16 分）

【問題三】：設n為自然數，試證：在任意3^n個正整數中，必存在2^n個數的和是2^n的倍數。（17 分）

二、筆試（二）

1.方程式$\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$的解為　（一）　。

2.定義兩正數如下：

$$a=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{2003\times2004},$$

$$b=\frac{1}{1003\times2004}+\frac{1}{1004\times2003}+\frac{1}{1005\times2002}+\cdots+\frac{1}{2004\times1003},$$

則$\frac{a}{b}$＝　（二）　。(化成最簡分數)

3. 設 a，b 為實數，若函數$f(x)=(a\cos x+b\sin x)\cos x$有最大值 3 及最小值$-1$，則$a$之值為　（三）　。

4.設圓 O 是△ABC 的內切圓，切點 P, Q, R 分別在 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上。若 $\overline{AP}=x, \overline{BQ}=y, \overline{CR}=z$，則圓 O 的半徑為　（四）　。(以x, y, z表示)

5.若 u, v, w, x, y, z 能使下圖各行、各列及兩個對角線的和都相等。則$uvw=$　（五）　。

2	3	x
5	y	u
z	v	w

6.若拋物線 $y=x^2+k$ 與橢圓$9x^2+16y^2=144$有四個相異交點，則常數k的範圍為　（六）　。

7.觀察以下數列的規律：

0, 1, -1, 2, 3, -2, 4, 5, 6, -3, 7, 8, 9, 10, -4, 11, 12, 13, 14, 15, -5, ……

則第 2004 項爲＿（七）＿。

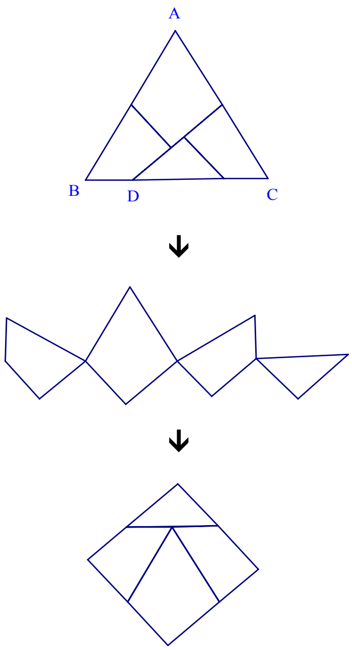
參、第四區（新竹區）

一、筆試（一）

【問題一】:

試證：對任意正整數 n，$(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 皆爲正整數，而且是 2^n 的倍數。(16 分)

【問題二】: 邊長爲 4 的正三角形 ABC 紙板，如圖所示將它剪開，然後可以拼成一個正方形。試求 BD 的長度。(16 分)



【問題三】: 小明有 64 張卡片，每張卡片上都有不同的條碼。小明只知道每一組條碼代表一個數字，但是他不知如何解讀這些條碼。爲判讀這些條碼所代表的意義，小明有一台機器可供使用。這台機器每次操作可以讀取兩張卡片，然後告訴小明哪一張卡片上的條碼所代表的數字較大。

(1)爲找出這堆條碼所代表的第二大的數字的卡片，小明至少需要操作這台機器幾次？(7 分)

(2)爲找出這堆條碼所代表的第三大的數字的卡片，小明至少需要操作這台機器幾次？(10 分)

證明你的答案。

二、筆試（二）

1. $\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}=$＿（一）＿。

2. △ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$。若 H 爲△ABC 的垂心，O 爲△ABC 的外心，M 爲 BC 邊的中點，則 OM 的長和 AH 的長之比 $\frac{\overline{OM}}{\overline{AH}}=$＿（二）＿。

3. 正整數 n 滿足 3 可以整除 $2n-1$，5 可以整除 $3n-2$，且 7 可以整除 $5n-4$。則 n 之最小可能值爲＿（三）＿。

4. 方程式 $\sqrt{(x+4)^2+1}+\sqrt{(x-4)^2+1}=10$ 的實根 x 爲＿（四）＿。

5. 自 1 至 15 的正整數中，選取三個兩兩不相鄰的數字的方法有＿（五）＿種。

6. 若整數 $a>2004$，且方程式 $(x-a)(x-2004)+1=0$ 有整數根，則 $a=$＿（六）＿。

《參考解答》

壹、第一區（花蓮區）

一、筆試（一）

【問題一】解：

(1)當鉛直線或水平線平分大矩形面積時，

等式 $a+A=bB$ 成立。

(2)當鉛直線平分大矩形面積時，

等式 $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$ 成立。

(3)當鉛直線平分大矩形面積時，

等式 $A-a=B-b$ 成立。

(4)無論鉛直線或水平線爲何，

等式 $aA=bB$ 恆成立。

【問題二】解：

(1) 因對於所有的正整數 m,n 恆滿足

$\frac{23}{41}<\frac{23m+32n}{41m+57n}<\frac{32}{57}$，反之，

設 $\frac{a}{b}$ 滿足 $\frac{23}{41}<\frac{a}{b}<\frac{32}{57}$，取 m=41a-23b，n=32b-57a，則 m,n 均爲正整數，且 32m+23n=32×41a-23×51a=a，57m+41n=－57×23b＋41×32b=b，

即 $\frac{b}{a}=\frac{23m+32n}{41m+57n}$

(2)取 m＝1，n=1 時 $\frac{b}{a}=\frac{23+32}{41+57}=\frac{55}{98}$ 爲最簡分數且分母最小。

【問題三】解：

(1)設 $a_n=a_1+(n-1)d, b_n=b_1+(n-1)e$，則

$$\frac{3n-3}{2n+3}=\frac{A_n}{B_n}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{n[2b_1+(n-1)e]}$$

$$=\frac{dn+2a_1-d}{en+2b_1-e}, \forall n$$

故知 d=3r，e=2r

(2)將 n=1 代入得 $\frac{0}{5}=\frac{A_1}{B_1}=\frac{a_1}{b_1}\Rightarrow a_1=0$

將 n=2 代入得

$$\frac{3}{7}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}=\frac{3r}{b_1+(b_1+2r)}\Rightarrow b_1=\frac{5r}{2}$$

(3)因此 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+(n-1)d}{b_1+(n-1)e}=\frac{0+(n-1)3r}{\frac{5r}{2}+(n-1)2r}$

$$=\frac{6(n-1)r}{5r+4(n-1)r}=\frac{6n-6}{4n+1}$$

因而 $\frac{a_{16}}{b_{16}}=\frac{6\times16-6}{4\times16+1}=\frac{90}{65}=\frac{18}{13}$

二、筆試（二）

(一) 105

(二) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

(三) $-2\le b\le 2$

(四) 12.5

(五) $\frac{2003}{2}$

(六) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$

(七) 42

貳、第二區（台北區）

一、筆試（一）

【問題一】:

〈證法一〉:展開並簡化此不等式如下：

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2>2a^4+2b^4+2c^4$$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2<0$

$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4+c^4-2b^2c^2)<0$

$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2<0$ ----- (*)

因式分解不等式（*），得到

$$[a^2-(b+c)^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]$$
$$=[a+(b+c)]\cdot[a-(b+c)]\cdot[a+(b-c)]\cdot[a-(b-c)]$$
$$=\underset{+}{(a+b+c)}\underset{-}{(a-b-c)}\underset{+}{(a+b-c)}\underset{+}{(a-b+c)}<0$$

(因爲 a,b,c 爲任一三角形之三邊長，所以

a,b,c 滿足 $\begin{cases} a+b+c>0 \\ a-b-c<0 \\ a+b-c>0 \\ a-b+c>0 \end{cases}$，不等式得證。)

〈證法二〉：展開並簡化此不等式如下：

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2>2a^4+2b^4+2c^4$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2<0$

$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4+c^4-2b^2c^2)<0$

$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2<0$ ----- (*)

由上可知，欲證此不等式成立，即等價於證明不等式（*）成立。

令 $x=a^2$，並考慮下列一元二次方程式：

$x^2-2(b^2+c^2)x+(b^2-c^2)^2=0$ ----- (**)

其兩根分別爲 $x_1=(b+c)^2$，和 $x_2=(b-c)^2$

由觀察不等式（*）和一元二次方程式（**）得知：

不等式（*）成立 $\Leftrightarrow (b-c)^2<x<(b+c)^2$

$\Leftrightarrow (b-c)^2<a^2<(b+c)^2$

$\Leftrightarrow |b-c|<a<b+c$ ---------(***)

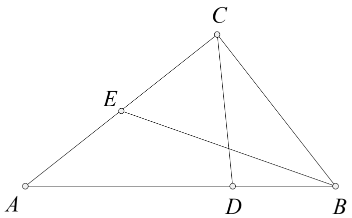
因爲 a,b,c 爲任一三角形之三邊長，所以(***)必成立。

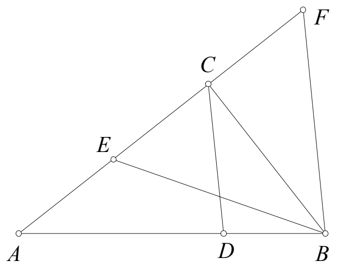
因此，不等式（*）亦成立，亦即欲證之不等式成立。

【問題二】：

〈證法一〉：在 $\overrightarrow{CA}$ 的相反射線上選取點 F 使得 $\overline{CF}=\overline{CE}$。在△$ABF$ 中，因爲 $\overline{AD}=2\overline{DB}$ 且 $\overline{AC}=2\overline{CF}$，所以，$\overline{CD}$ 與 $\overline{BF}$ 平行。由此可得 $\angle ACD=\angle AFB$。依假設，可得 $\angle BEF=\angle BEC=\angle ACD=\angle AFB=\angle EFB$。

由此可知△BEF 是等腰三角形且 $\overline{BE}=\overline{BF}$。因爲 $\overline{BC}$ 是等腰三角形△BEF 的底邊 $\overline{EF}$ 上的中線，所以，$\overline{BC}$ 與 $\overline{EF}$ 垂直，亦即：$\angle ACB$ 是直角，△ABC 是直角三角形。 ||





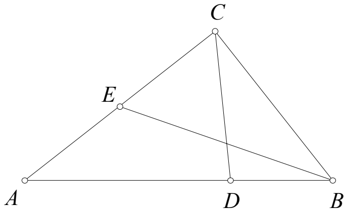
〈證法二〉：設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於點 G。過點 E 作 $\overline{CD}$ 的平行線與 $\overline{AB}$ 相交於點 H。

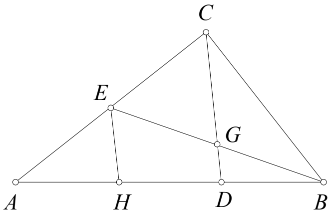
因爲點 E 是 $\overline{AC}$ 的中點，所以，點 H 是 $\overline{AB}$ 的中點。因爲 $\overline{AD}=2\overline{DB}$，所以，$\overline{DH}=\overline{DB}$，進一步得 $\overline{GB}=\overline{GE}$，點 G 是 $\overline{BE}$ 的中點。因爲 $\angle ACD=\angle BEC$，所以，$\overline{GE}=\overline{GC}$。由此得 $\overline{GB}=\overline{GC}$ 及 $\angle GBC=\angle GCB$。因此，得

$\angle ACB=\angle GCE+\angle GCB$

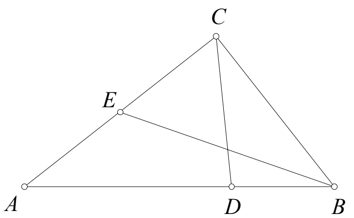
$$=\frac{1}{2}(\angle GCE+\angle GEC)+\frac{1}{2}(\angle GCB+\angle GBC)$$
$$=\frac{1}{2}(\angle BCE+\angle CEB+\angle EBC)$$
$$=\frac{1}{2}\times 180^{\circ}=90^{\circ}$$

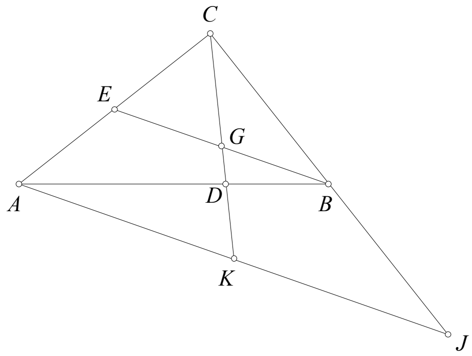
‖





〈證法三〉：設$\overline{BE}$與$\overline{CD}$相交於點 G。在$\overrightarrow{BC}$的相反射線上選取點 J 使得$\overline{BC}=\overline{BJ}$，設$\overline{AJ}$與直線 CD 相交於點 K。因為$\overline{AB}$是$\triangle ACJ$的一條中線，而且$\overline{AD}=2\overline{DB}$，所以，點 D 是$\triangle ACJ$的重心。於是，$\overline{CK}$是$\triangle ACJ$的另一條中線，點 K 是$\overline{AJ}$的中點。因為 B 與 E 分別為$\overline{AC}$與$\overline{CJ}$的中點，所以，$\overline{BE}$與$\overline{AJ}$平行。於是，由$\overline{AK}=\overline{KJ}$可得$\overline{GB}=\overline{GE}$，點 G 是$\overline{BE}$的中點。‖

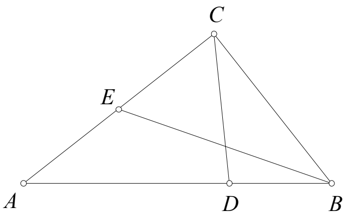


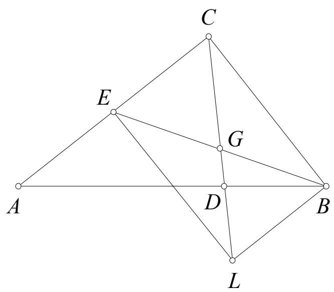


〈證法四〉：設$\overline{BE}$與$\overline{CD}$相交於點 G。過點 B 作$\overline{AC}$的平行線與直線 CD 相交於點 L。因為$\overline{AC}$與$\overline{BL}$平行，所以，$\triangle ACD$與$\triangle BLD$相似。於是，由$\overline{AD}=2\overline{DB}$可得$\overline{AC}=2\overline{BL}$。由此可知：

$$\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{BL}\text{。}$$

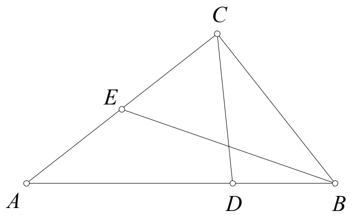
因為四邊形 $BCEL$ 有一組對邊平行且等長，所以，$BCEL$ 是平行四邊形。於是，兩對角線$\overline{BE}$與$\overline{CL}$的交點 G 是$\overline{BE}$的中點，$\overline{GB}=\overline{GE}$。‖

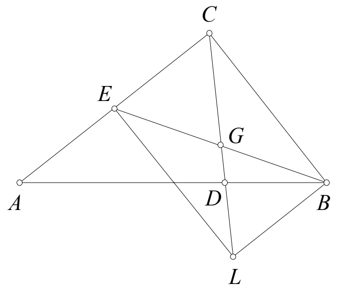




〈證法五〉：設$\overline{BE}$與$\overline{CD}$相交於點 G。過點 E 作$\overline{AB}$的平行線與$\overline{CD}$相交於點 M。因為點 E 是$\overline{AC}$的中點，所以，點 M 是$\overline{CD}$的中點而且$\overline{AD}=2\overline{EM}$。因為$\overline{AD}=2\overline{DB}$，所以，$\overline{EM}=\overline{DB}$。

因爲四邊形 $BDEM$ 有一組對邊平行且等長，所以，$BDEM$ 是平行四邊形。於是，兩對角線 $\overline{BE}$ 與 $\overline{DM}$ 的交點 G 是 $\overline{BE}$ 的中點，$\overline{GB}=\overline{GE}$ 。 ||





【問題三】解：

(1)當 $n=1$ 時，在任意 3 個正整數 x,y,z 中，必有兩個數有相同的奇偶性，其和爲 2 的倍數。

(2)當 $n=k$ 時，假設命題成立，即：在任意 3^k 個正整數中，必存在 2^k 個數，其和是 2^k 的倍數。

(3)當 $n=k+1$ 時，對任意 3^{k+1} 個正整數，先平分成三堆，每一推各有 3^k 個正整數。依歸納假設，每堆各存在 2^k 個數，其和是 2^k 的倍數。可設第一堆中的 2^k 個數之和爲 $S_1=2^k x$，第二堆中的 2^k 個數之和爲 $S_2=2^k y$，第三堆中的 2^k 個數之和爲 $S_3=2^k z$，其中 x,y,z 爲正整數。

因 x,y,z 中，必有兩個數有相同的奇偶性；不失一般性，設 x,y 同爲奇數或同爲偶數，則 $x+y$ 是 2 的倍數，可令 $x+y=2m$。

因此，第一堆和第二堆中，一共找出的 $2^k+2^k=2^{k+1}$ 個數之和等於 $S_1+S_2=2^k x+2^k y=2^{k+1}m$ 爲 2^{k+1} 的倍數。得證。

二、筆試（二）

(一)　$x=3\sqrt{21}$ 或 $x=-3\sqrt{21}$（只對一個得 2 分）

(二)　$\dfrac{3007}{2}$

(三)　2

(四)　$\sqrt{\dfrac{xyz}{x+y+z}}$

(五)　12

(六)　$-\dfrac{1033}{64}<k<-3$（全對才給分）

(七)　1942

參、第四區（新竹區）

一、筆試（一）

【問題一】解：

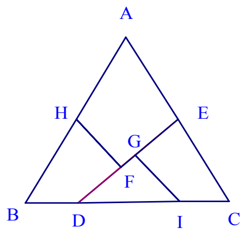
將 $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 記爲 $A(n)$。

(i)當 n =1, 2 時，$A(1)=6$ 爲 2 的倍數，$A(2)=28$ 爲 2^2 的倍數。

(ii)現假設當 $n=k$-1 和 k 時原敘述成立，亦即 $A(k$-1) 爲 2^{k-1} 的倍數，而 $A(k)$ 爲 2^k 的倍數 ($k\ \geqq\ 2$)。則當 $n=k+1$ 時，$A(k+1)=6\,A(k)+4\,A(k\text{-}1)$ 可知爲 2^{k+1} 的倍數。

(這裡利用的公式是 $x^{k+1}+y^{k+1}=(x+y)(x^k+y^k)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})$.) 故由數學歸納法原理知原敘述對所有正整數 n 皆成立。

【問題二】解：



令正方形的邊長爲a,則 $a^2=4\sqrt{3}.$ 所以 $a=2\sqrt[4]{3}.$
由圖形的拼合關係，可觀察到

$\overline{AE}=\overline{EC}=2,$

$\overline{EF}+\overline{FD}=\overline{EG}+\overline{GD},$

$\overline{EF}+\overline{EG}=\overline{FD}+\overline{GD}=a.$

因此$\overline{FD}=\overline{EG}$, 所以$\overline{DE}=a=2\sqrt[4]{3}.$

ΔCDE中$\overline{DE}^2=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2-2\overline{CD}\cdot\overline{CE}\cos 60°,$

$\Rightarrow 4\sqrt{3}=\overline{CD}^2+4-2\overline{CD}$

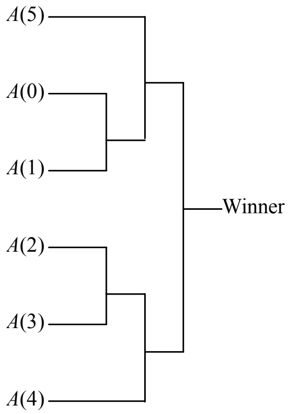
$\Rightarrow \overline{CD}=1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}$

$\Rightarrow \overline{BD}=4-\overline{CD}=3-\sqrt{4\sqrt{3}-3}$

【問題三】解：

(1)我們將此題情境，化約爲未知的 64 個相異數字來比大小。找出最大的數字需要 63 次比較（考慮單淘汰的過程）。因爲第二大的數字只會小於最大的數字，所以必定發生在直接輸給最大的數字的那 6 個數字中。再從那 6 個數字取出最大的數字需要 5 次操作，所以找出第二大的數字需要 63+5=68 次。

(2)第三大的數字必定發生在上述比較中直接輸給第二大數字之處。首先在步驟(1)中，直接敗給最大數字之卡片有 6 張，我們分別將它們記爲 $A(j)$，其中 $j=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 爲它們敗給最大數字之前贏過的數字個數。從它們之中決定第二大數字的樹狀圖可以如下排列（如下頁之圖）。如果 $A(j), j$=0,1,2,3,爲第二大數字，則直接敗給第二大數字的卡片有 $(j+3)$ 張，比出第三大的數字需要再 $j+2$ 次操作；如果 $j=4, 5,$ 則直接敗給第二大數字的卡片有 $(j+2)$ 張，比出第三大的數字需要再 $(j+1)$ 次操作。由上述討論，知道在最壞情形下，比出第三大數字還需要 6 次，故總共需要 68+6=74 次。



二、筆試（二）

(一) $\frac{1}{2}$

(二) $\frac{1}{2}$

(三) 89

(四) $\pm\frac{10\sqrt{2}}{3}$

(五) 286

(六) 2006