2014 第 15 屆 AMC10 試題

1. 試問$10\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)^{-1}$之值爲何？

   (A) 3　(B) 8　(C) $\frac{25}{2}$　(D) $\frac{170}{3}$　(E) 170　【2014AMC10】

答：(C)

解：所求$=10\times\left(\frac{5+2+1}{10}\right)^{-1}=10\times\frac{10}{8}=\frac{25}{2}$

2. 小瑞的貓每天吃兩餐，早上吃$\frac{1}{3}$罐的貓食罐頭、晚上吃$\frac{1}{4}$罐的貓食罐頭。
   在星期一早上餵貓之前，小瑞打開一盒裝有6罐貓食罐頭的盒子。
   試問貓吃完這盒內所有的貓食罐頭時，是在星期幾？

   (A) 星期二　(B) 星期三　(C) 星期四　(D) 星期五　(E) 星期六　【2014AMC10】

答：(C)

解：每天吃$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$罐貓食罐頭，共$\frac{6}{\frac{7}{12}}=\frac{72}{7}=10\frac{2}{7}$天吃完，該日爲星期四

3. 某天布萊祺爲她的麵包店烤製了48條麵包，
   上午她以每條2.50美元的價格賣了一半的麵包；
   中午過後因爲麵包不夠新鮮，她將每條麵包以上午價格的一半賣了剩下麵包的三分之二；
   快到傍晚時，她以每條1美元的價格將剩下的麵包全部賣完。
   若每條麵包的成本爲0.75美元，則她當天淨賺了多少美元？

   (A) 24　(B) 36　(C) 44　(D) 48　(E) 52　【2014AMC10】

答：(E)

解：$2.50\times24+1.25\times16+1.00\times8-0.75\times48=60+20+8-36=52$

4. 阿福沿著某條街道行走，這條街道上共有四間房子排成一列，每間都漆著不同的顏色。
   已知他先經過橘色的房子後才知道紅色的房子，
   且先經過藍色的房子後才經過黃色的房子。
   若藍色的房子並不是緊鄰黃色的房子，則這四間房子可能排列的順序共有多少種？

   (A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5　(E) 6　【2014AMC10】

答：(B)

解：$\underbrace{\frac{4!}{2!\times2!}}_{\text{橘紅次序不變，藍黃次序不變}}-\underbrace{\frac{3!}{2!}}_{\text{橘紅次序不變，藍黃相鄰}}=6-3=3$

5. 某次代數測驗，有10% 的學生成績是 70 分，有35% 的學生成績是 80 分，
有30% 的學生成績是 90 分，其餘的學生成績是 100 分。
試問這次測驗學生成績的平均數與中位數相差多少分？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5 【2014AMC10】

答：(C)

解：平均數 $=70\times 10\%+80\times 35\%+90\times 30\%+100\times 25\%=7+28+27+25=87$
中位數 $=90$
兩者相差 3 分

6. 設 a 頭乳牛在 c 天內產了 b 加侖的牛奶。
按此比例，d 頭乳牛在 e 天內可以生產多少加侖的牛奶？
(A) $\dfrac{bde}{ac}$ (B) $\dfrac{ac}{bde}$ (C) $\dfrac{abde}{c}$ (D) $\dfrac{bcde}{a}$ (E) $\dfrac{abc}{de}$ 【2014AMC10】

答：(A)

解：每天每頭牛可產 $\dfrac{b}{ac}$ 加侖牛奶，故所求爲 $de\times\dfrac{b}{ac}$ 加侖

7. 已知實數 x、y、a 及 b 均不爲零且滿足 $x<a$ 與 $y<b$。
試問下列的不等式中有幾個必定是正確的？
$(I)\ x+y<a+b$ $(II)\ x-y<a-b$ $(III)\ xy<ab$ $(IV)\ \dfrac{x}{y}<\dfrac{a}{b}$
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 【2014AMC10】

答：(B)

解：僅有 $(I)\ x+y<a+b$ 必然成立
(II) 當 $x=2<a=3$ 與 $y=-5<b=1$，$(x-y)=7>(a-b)=2$
(III) 當 $x=-3<a=-2$ 與 $y=-5<b=1$，$(xy)=15>(ab)=-2$
(IV) 當 $x=-3<a=-2$ 與 $y=-5<b=1$，$\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{3}{5}>\left(\dfrac{a}{b}\right)=-2$

8. 下列何者是正整數的平方？(註：下列表示式中的 $n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$)
(A) $\dfrac{14!\times 15!}{2}$ (B) $\dfrac{15!\times 16!}{2}$ (C) $\dfrac{16!\times 17!}{2}$ (D) $\dfrac{17!\times 18!}{2}$ (E) $\dfrac{18!\times 19!}{2}$
【2014AMC10】

答：(D)

解：(D) $\dfrac{17!\times 18!}{2}=\dfrac{17!\times 17!\times 18}{2}=17!\times 17!\times 9=(17!\times 3)^2$

9. 某直角三角形的兩股長分別爲 $2\sqrt{3}$ 及 6，它們分別爲另一股邊上的高。
試問此直角三角形第三邊上的高爲多少？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5 【2014AMC10】

答：(C)

解：斜邊長 $=\sqrt{12+36}=4\sqrt{3}$，三角形面積 $=\dfrac{2\sqrt{3}\times 6}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}\times h}{2}$ $\Rightarrow h=3$

10. 由a開始連續五個正整數，其平均數爲b。
試問由b開始連續五個正整數的平均數爲何？
(A) $a+3$ (B) $a+4$ (C) $a+5$ (D) $a+6$ (E) $a+7$ 【2014AMC10】

答：(B)

解：$b=\dfrac{(a)+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)}{5}=a+2$

所求$=\dfrac{(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)+(a+6)}{5}=a+4$

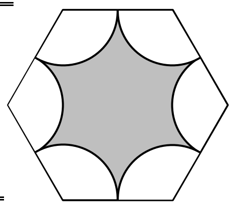
或所求$=\dfrac{(b)+(b+1)+(b+2)+(b+3)+(b+4)}{5}=b+2=a+2+2=a+4$

11. 有位顧客想買某個器具，他有三張不同的折價券，但只可以用其中一張：
折價券 1：如果訂價至少 50 美元，可以少付訂價的10%；
折價券 2：如果訂價至少 100 美元，可以少付 20 美元；
折價券 3：如果訂價超過 100 美元，可以少付超過 100 美元部分的18%
下列哪一個訂價，使用折價券 1 比使用折價券 2、折價券 3 能省更多的錢？
(A) 179.95 美元 (B) 199.95 美元 (C) 219.95 美元
(D) 239.95 美元 (E) 259.95 美元 【2014AMC10】

答：(C)

解：$\begin{cases} a\times 90\% < a-20 \\ a\times 90\% < 100+(a-100)\times 82\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>200 \\ a<225 \end{cases}$

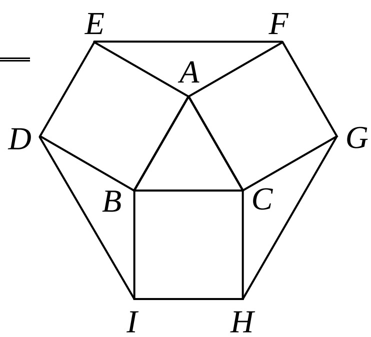
12. 有一個邊長爲6的正六邊形，以各頂點爲圓心、3爲半徑畫全等的六個弧。
如圖所示，在這正六邊形內且六個扇形外部的陰影區域之面積爲多少？
(A) $27\sqrt{3}-9\pi$ (B) $27\sqrt{3}-6\pi$ (C) $54\sqrt{3}-18\pi$
(D) $54\sqrt{3}-12\pi$ (E) $108\sqrt{3}-9\pi$ 【2014AMC10】



答：(C)

解：所求$=\underbrace{6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2}_{\text{正六邊形區域}}-\underbrace{2\times\pi\times 3^2}_{\text{白色扇形區域}}=54\sqrt{3}-18\pi$

13. 正三角形ABC的邊長爲1，正方形$ABCD$、$BCHI$及$CAFG$都在ΔABC的外部。試問六邊形$DEFGHI$的面積爲多少？
(A) $\dfrac{12+3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{9}{2}$ (C) $3+\sqrt{3}$
(D) $\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2}$ (E) 6 【2014AMC10】



答：(C)

解：所求$=\underbrace{3\times 1^2}_{\text{正方形}}+\underbrace{\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2}_{\text{正三角形}}+\underbrace{3\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2}_{\text{鈍角三角形}}=3+\sqrt{3}$

14. 已知互相垂直的兩條直線交於點 $A(6,8)$。
若這兩直線分別與 y 軸交於 P 、 Q 兩點且它們 y 坐標的和爲零，
則 ΔAPQ 的面積爲多少？
(A) 45 (B) 48 (C) 54 (D) 60 (E) 72 【2014AMC10】

答：(D)

解：令 $P(0,k)$ 、 $Q(0,-k)$，則斜率 $m_{AP}\times m_{AQ}=\frac{8-k}{6}\times\frac{8+k}{6}=-1 \Rightarrow k=\pm10$

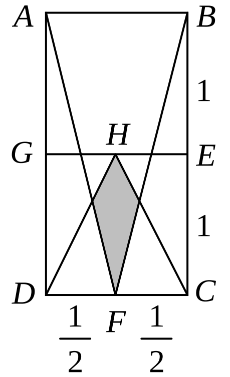
則 ΔAPQ 的面積爲 $=\frac{1}{2}\times20\times6=60$

15. 大衛從家裡開車到機場搭飛機。
第一個小時他開了 35 公里，他發現若仍以這樣的速率開車，他將會晚一小時抵達機場。
於是他在剩下的路程中，時速增加 15 公里，結果他反而提早了 30 分鐘抵達機場。
試問機場與他家的距離爲多少公里？
(A) 140 (B) 175 (C) 210 (D) 245 (E) 280 【2014AMC10】

答：(C)

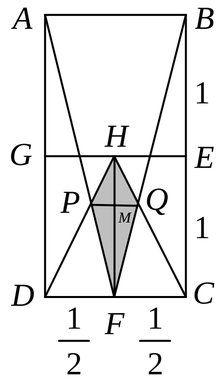
解：令原預定花費時間爲 t 小時
故總路成爲 $35\times(t+1)=35\times1+50\times(t-1.5) \Rightarrow t=5$
則總路程爲 $35\times6=210$

16. 在長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=1$ 、 $\overline{BC}=2$，
點 E 、 F 、 G 分別爲 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$ 的中點，
點 H 爲 $\overline{GE}$ 的中點。
試問圖中陰影區的面積爲多少？
(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{18}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (E) $\frac{1}{6}$
【2014AMC10】



答：(E)

解：所求 $=\overline{PQ}\times\overline{HF}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\overline{DC}\times\overline{HF}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$



17. 投擲三顆公正的骰子，
試問出現在其中兩顆骰子上數字的和等於剩下那顆骰子出現的數字之機率爲多少？
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{13}{72}$ (C) $\frac{7}{36}$ (D) $\frac{5}{24}$ (E) $\frac{2}{9}$ 【2014AMC10】

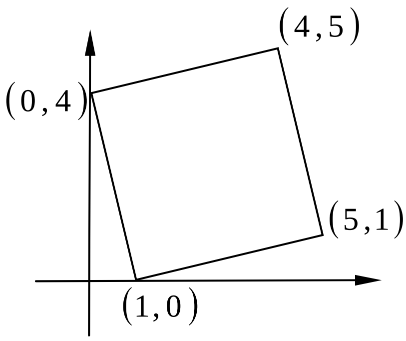
答：(D)

解：$(6,5,1)(6,4,2)(6,3,3)(5,4,1)(5,3,2)(4,3,1)(4,2,2)(3,2,1)(2,1,1)$

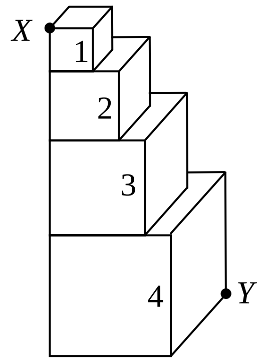
所求機率$=P=\dfrac{3!\times 6+\dfrac{3!}{2!}\times 3}{6^3}=\dfrac{45}{216}=\dfrac{5}{24}$

18. 若坐標平面上的某個正方形，它各頂點的 y 坐標分別爲 0、1、4、5，
則此正方形的面積爲多少？
(A) 16 (B) 17 (C) 25 (D) 26 (E) 27 【2014AMC10】

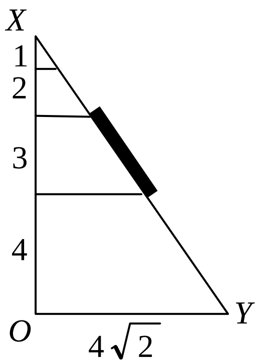
答：(B)
解：如右圖



19. 四個邊長分別爲 1、2、3、4 的正立方體堆疊如圖所示。
試問 $\overline{XY}$ 包含在那個邊長爲 3 的正立方體內的截線段之長度爲何？
(A) $\dfrac{3\sqrt{33}}{5}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$ (D) 4 (E) $3\sqrt{2}$
【2014AMC10】



答：(A)
解：所求$=\dfrac{3}{10}\times\overline{XY}=\dfrac{3}{10}\times\sqrt{132}=\dfrac{3}{5}\sqrt{33}$



20. 考慮$(8)\times(888\cdots 8)$兩項的乘積，其中第二項是k位數，
若乘積爲一整數，其各位數字的和爲 1000，則k是多少？
(A) 901 (B) 911 (C) 919 (D) 991 (E) 999 【2014AMC10】

答：(D)
解：原式$=64\times(1)\times\underbrace{(111\cdots 1)}_{k\text{位}}$

因爲 $64\times 11=704$ 、 $64\times 111=7104$ 、 $64\times 1111=71104$ 、......
所以 $64\times\underbrace{111\cdots 1}_{991\text{位}}=7\underbrace{11\cdots 1}_{989\text{個}}04$，滿足各位數字和爲 1000

21. 若正整數a與b使得$y=ax+5$和$y=3x+b$的圖形交x軸於同一點，
則所有這些可能交點的x坐標的和爲何？
(A) -20 (B) -18 (C) -15 (D) -12 (E) -8 【2014AMC10】

答：(E)

解：$\begin{cases} y=ax+5 \\ y=0 \end{cases}$之交點$\left(-\dfrac{5}{a},0\right)$、$\begin{cases} y=3x+b \\ y=0 \end{cases}$之交點$\left(-\dfrac{b}{3},0\right)$

而$-\dfrac{5}{a}=-\dfrac{b}{3}$ $\Rightarrow ab=15$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{c|cccc} a & 1 & 3 & 5 & 15 \\ \hline b & 15 & 5 & 3 & 1 \end{array}$

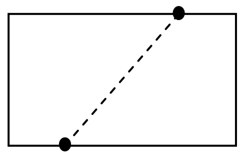
交點$(-5,0)$、$\left(-\dfrac{5}{3},0\right)$、$(-1,0)$、$\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$，所求爲$-8$

22. 在長方形$ABCD$中，$\overline{AB}=20$、$\overline{BC}=10$。若點E在$\overline{CD}$上使得$\angle CBE=15^\circ$，
則$\overline{AE}$的長度是多少？
(A) $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ (B) $10\sqrt{3}$ (C) 18 (D) $11\sqrt{3}$ (E) 20 【2014AMC10】

答：(E)

解：$\overline{CE}=\overline{BC}\times\tan 15^\circ=10\times\left(2-\sqrt{3}\right)$，故$\overline{DE}=10\sqrt{3}$，則$\overline{AE}=20$

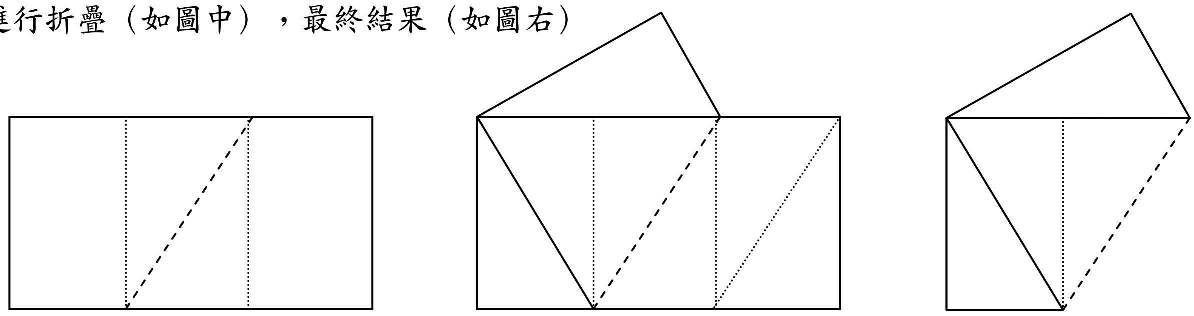
23. 一張長方形紙片的長是寬的$\sqrt{3}$倍，其面積爲A。
將兩個長邊三等分，如圖所示；圖中的虛線是
從一條長邊的第一個三等分點連到對邊的第二個三等分點。
若將紙片沿著此虛線摺疊壓平後得到另一個新的圖形，
其總面積爲B，則$B:A$爲下列何者？



(A) $1:2$ (B) $3:5$ (C) $2:3$ (D) $3:4$ (E) $4:5$ 【2014AMC10】

答：(C)

解：不妨令長邊長爲3、短邊長爲$\sqrt{3}$（如圖左）
進行折疊（如圖中），最終結果（如圖右）



24. 構造一個正整數數列，首先列出由1開始的4個數，跳過一個數；
再列出5個數，跳過2個數；
再列出6個數，跳過3個數；
如此繼續下去，在第n次時，列出$n+3$個數，再跳過n個數；
即此數列爲$1,2,3,4,6,7,8,9,10,13,\cdots$。
試問此數列的第$500,000$項爲下列何者？
(A) $996,506$ (B) $996,507$ (C) $996,508$ (D) $996,509$ (E) $996,510$
【2014AMC10】

答：(A)

$\boxed{解}$：第一群，連 4 數，空 1 數，共 5 數

第二群，連 5 數，空 2 數，共 7 數

第三群，連 6 數，空 3 數，共 9 數

......

第 n 群，連 $n+3$ 數，空 n 數，共 $2n+3$ 數

設第 $500,000$ 項爲第 m 群第 k 項

前 $m-1$ 群用掉 $4+5+6+\cdots+(m+2)=\dfrac{(m+6)(m-1)}{2}<500000$ 個數　$\Rightarrow m$ 取 997

前 996 群用掉 $4+5+6+\cdots+999=\dfrac{1003\times996}{2}<499494$ 個數，剩 506 個數

前 996 群累積 $5+7+9+\cdots+1995=996000$

故第 $500,000$ 項爲 996506

---

25. 已知 5^{867} 是介於 2^{2013} 與 2^{2014} 之間。試問有多少組整數數對 (m,n) 滿足：$1\le m\le 2012$ 且 $5^n<2^m<2^{m+2}<5^{n+1}$？

(A) 278　(B) 279　(C) 280　(D) 281　(E) 282　【2014AMC10】

$\boxed{答}$：(B)

$\boxed{解}$：$2^{2013}<5^{867}<2^{2014}\Rightarrow 2013\log2<867\log5<2014\log2\Rightarrow\dfrac{2013}{867}<\dfrac{\log5}{\log2}<\dfrac{2014}{867}$

而 $5^n<2^m<2^{m+2}<5^{n+1}\Rightarrow n\log5<m\log2<(m+2)\log2<(n+1)\log5$

$$\Rightarrow\frac{m+2}{n+1}<\frac{\log5}{\log2}<\frac{m}{n}\text{，故}\begin{cases}\dfrac{m+2}{n+1}\le\dfrac{2013}{867}\\ \dfrac{2014}{867}\le\dfrac{m}{n}\end{cases}\Rightarrow\frac{2014n}{867}\le m\le\frac{2013(n+1)}{867}-2$$

$$\text{但 }1\le m\le2012\text{，故}\begin{cases}1\le\dfrac{2014n}{867}\\ \dfrac{2013(n+1)}{867}-2\le2012\\ \dfrac{2014n}{867}\le\dfrac{2013(n+1)}{867}-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{867}{2014}\le n\\ n\le\dfrac{2014\times867}{2013}\\ n\le279\end{cases}$$

$\Rightarrow 1\le n\le279$

$\boxed{解}$：引理：任意兩個 5 的冪之間，僅能存在 2 個 2 的冪，或存在 3 個 2 的冪.

證明：(i) 若兩個 5 的冪之間只存在 1 個 2 的冪，

即 $2^q<5^p<2^{q+1}<5^{p+1}<2^{q+2}$，

則 $2^{q+2}>5^{p+1}=5^p\times5>2^q\times5$，顯然矛盾

(ii) 若兩個 5 的冪之間只存在 4 個 2 的冪，

即 $2^q<5^p<2^{q+1}<2^{q+4}<5^{p+1}<2^{q+5}$，

則 $5^{p+1}>2^{q+4}=2^{q+1}\times8>5^p\times8$，顯然矛盾

引理得證。

原題：可設兩個 5 的冪之間恰存在 2 個 2 的冪的有 x 組，恰存在 3 個 2 的冪的有 y 組，

則 $\begin{cases}x+y=867\\2x+3y=2013\end{cases}$，故 $\begin{cases}x=588\\y=279\end{cases}$