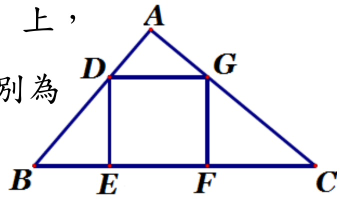
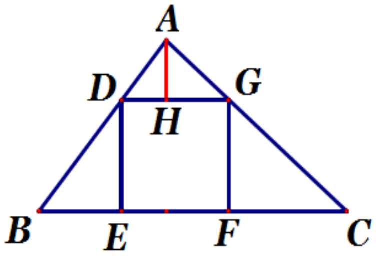
TRML 個人賽-2013 第一回

I-1.如圖，$\triangle ABC$ 中，點 D,G 分別在邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上，且點 E, F 在邊 $\overline{BC}$ 上，使得四邊形 $DEFG$ 是正方形。如果 $\triangle ADG$, $\triangle BED$, $\triangle CGF$ 的面積分別為 2, 3, 5，則正方形 $DEFG$ 的面積為?



[解]：設正方形 $DEFG$ 的邊長為 x，作 $\overline{AH}\perp\overline{DG}$



$a\triangle ADG=2=\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}\cdot\overline{DG}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}\cdot x\ \therefore\overline{AH}=\frac{x}{4}$

$a\triangle BED=3=\frac{1}{2}\cdot\overline{BE}\cdot\overline{DE}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BE}\cdot x\ \therefore\overline{BE}=\frac{x}{6}$

$a\triangle ADG=5=\frac{1}{2}\cdot\overline{FC}\cdot\overline{FG}=\frac{1}{2}\cdot\overline{FC}\cdot x\ \therefore\overline{FC}=\frac{x}{10}$

$a\triangle ABC=2+3+5+x^2=\frac{1}{2}\cdot(\frac{x}{6}+x+\frac{x}{10})\cdot(\frac{x}{4}+x)\Rightarrow 20+2x^2=20+x^2+\frac{64}{x^2}\quad\therefore x^4=64\Rightarrow x^2=8$

$\therefore$正方形 $DEFG$ 的面積為 8。

I-2.若 $a^2+b^2+c^2=47$，則 $\begin{vmatrix}a^2-1 & ab & ca\\ ab & b^2-1 & bc\\ ca & bc & c^2-1\end{vmatrix}=$?

[解]：1st method （第一、二、三列分別提出 a，b，c）

$$\begin{vmatrix}a^2-1 & ab & ac\\ ab & b^2-1 & bc\\ ac & bc & c^2-1\end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix}a-\frac{1}{a} & b & c\\ a & b-\frac{1}{b} & c\\ a & b & c-\frac{1}{c}\end{vmatrix}$$

（第一、二、三行分別乘以 a，b，c）

$$=\begin{vmatrix}a^2-1 & b^2 & c^2\\ a^2 & b^2-1 & c^2\\ a^2 & b^2 & c^2-1\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ a^2 & b^2-1 & c^2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=b^2-1+a^2+c^2$$

$=a^2+b^2+c^2-1=46$

$\boxed{速解}$：令 $a=b=0, c^2=47$，$\Rightarrow\begin{vmatrix}a^2-1 & ab & ca\\ ab & b^2-1 & bc\\ ca & bc & c^2-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 46\end{vmatrix}=46$

2^{nd} method：

先將各列依序乘上a, b, c, 再將各行依序提出a, b, c

$$\begin{vmatrix} a^2-1 & ab & ca \\ ab & b^2-1 & bc \\ ca & bc & c^2-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^3-a & a^2b & ca^2 \\ ab^2 & b^3-b & b^2c \\ c^2a & bc^2 & c^3-c \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2-1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-1 & a^2+b^2+c^2-1 & a^2+b^2+c^2-1 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix}$$ (二、三列加到第一列)

$$=(a^2+b^2+c^2-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b^2-1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2-1 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & -1 & 0 \\ c^2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(第一行$\times(-1)$ 加到第二、三行)

$$= a^2+b^2+c^2-1 = 46$$

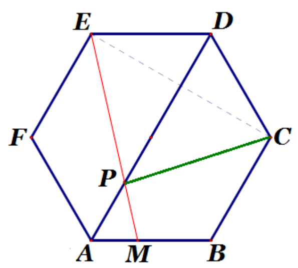
I-3.設 A 為非空的有限集合，規定 $S(A)$表示 A 中所有元素的和；例如：$S(\{1,3,7\})=1+3+7=11$。考慮集合$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$中的每個非空子集合 A，則所有這樣 $S(A)$的總和為______。

[解]：注意到每個元素$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 在集合中出現的次數皆為2^7，所以$S(A)$的總和為 $(1+2+3+4+5+6+7+8)\times 2^7=36\times128=4608$.

TRML 個人賽-2013 第二回

I-4.設 $ABCDEF$ 是一個邊長為 6 的正六邊形，M 是 $\overline{AB}$ 邊上的一點使得 $\overline{AM}=2$。今在 $\overline{AD}$ 上取一點 P 使得 $\overline{PM}+\overline{PC}$ 之值最小，則 $\overline{AP}=$______。

[解]：如圖，C 點對直線 $\overline{AD}$ 所作的對稱點恰為 E 點，則 P 點為 $\overline{EM}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點



注意到$\Delta AMP\sim\Delta DEP$，所以我們有 $\overline{AP}$ ：$\overline{PD}=\overline{AM}$ ：$\overline{DE}=2：6=1：3$

又 $\overline{AD}=12$，$\overline{AP}=\frac{1}{4}\overline{AD}=3$。

I-5.同時與 12 和 10 互質的正整數中，由小到大排列，第 2013 個是______。

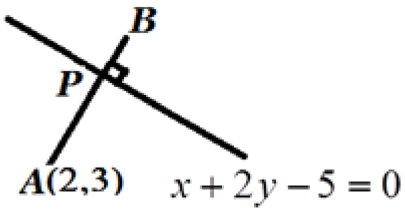
[解]：12 與10 的質因數有$2, 3, 5$, 若 n 與$2, 3, 5$互質, 則 n 也與$[2, 3, 5]=30$ 互質。
令 $n=30q+r$, 由$(n, 30)=(30q+r, 30)=(r, 30)$ 可知, 若$(n, 30)=1\Leftrightarrow(r, 30)=1$，

則不大於30且與30 互質的整數為1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29，共有8 個,
∴若將每30 個連續正整數分為一組, 該組內恰有8 個數與30 互質。
2013= 8×251 +5，∴第2013 個數為30 ×251 (組) + 17 (第五個) =7547。

I-6.給定坐標平面上 A, B 兩點，A 點的坐標為$(2, 3)$，若直線 $x+2y-5=0$ 垂直線段 AB 於 P 點。且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則點 B 的坐標為______。

[解]：1st method：直線$\overleftrightarrow{AB}$的方程式可設為$2x-y+k=0$，過點$A(2, 3)$ ∴$k=1$。

$\Rightarrow\begin{cases}x+2y-5=0\\2x-y+1=0\end{cases}$，解聯立得 P 點之坐標為$(\frac{7}{5},\frac{9}{5})$。



設點B的坐標為(x, y)，則由分點公式得：

$(\frac{7}{5},\frac{9}{5})=(\frac{2\times x+1\times 2}{2+1},\frac{2\times y+1\times 3}{2+1})=(\frac{2x+2}{3},\frac{2y+3}{3})$

$\therefore(x, y)=(\frac{11}{10},\frac{12}{10})=(\frac{11}{10},\frac{6}{5})=(1.1 , 1.2)$

2nd method

直線$\overleftrightarrow{AB}$的法向量為$(2,-1)$，則$(2,-1)\cdot(x-2, y-3)=0\Rightarrow$直線$\overleftrightarrow{AB}$的方程式為：$2x-y+1=0$

$\Rightarrow\begin{cases}x+2y-5=0\\2x-y+1=0\end{cases}$，解聯立得 P 點之坐標為$(\frac{7}{5},\frac{9}{5})$。設點$B$的坐標為$(x, y)$，

$\because\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{BP}$ $\therefore(\frac{3}{5},\frac{6}{5})=2(\frac{7}{5}-x,\frac{9}{5}-y)=(\frac{14}{5}-2x,\frac{18}{5}-2y)$ $\therefore(x, y)=(\frac{11}{10},\frac{12}{10})=(\frac{11}{10},\frac{6}{5})=(1.1 , 1.2)$

TRML 個人賽-2013 第三回

I-7.設三次方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ 之實數根為α, β,γ，且$\alpha<\beta<\gamma$。若數列α, β,γ成等差數列，且β, α, γ成等比數列，則 b=______。

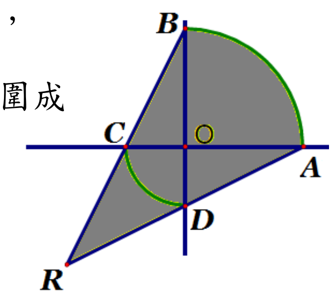
[解]：由 Vieta's formulas $\alpha\beta\gamma=-8$，又 β, α, γ 為 geometric sequence, $\therefore\alpha^2=\beta\gamma$.
Then we obtain $\alpha^3=-8$, $\alpha=-2$. On the other hand, α, β,γ is arithmetic.

Hence $2\beta=\alpha+\gamma$ or $2\beta=-2+\gamma$. $\Rightarrow\begin{cases}\beta\gamma=4\\2\beta=-2+\gamma\end{cases}$ $\therefore\beta\cdot(2\beta+2)=4$, $2\beta^2+2\beta-4=0$，

$\Rightarrow\beta^2+\beta-2=0$，$(\beta+2)(\beta-1)=0$ $\therefore\beta=1, -2$(不合) ; $\gamma=4$

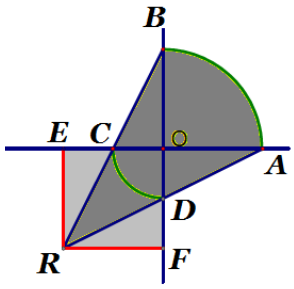
$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(-2)\cdot1+1\cdot4+4\cdot(-2)=-6$。

I-8.如圖，扇形 OAB 及扇形 OCD 的半徑分別為 8 及 4，其共同圓心為 O，$\angle AOB=90^\circ$。若 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 之延長線相交於點 R，則由 $\overline{AR}$，$\overline{BR}$ 及弧$\widehat{AB}$所圍成陰影區域 RAB 的面積為______。



[解]：首先我們作 $\overline{RE}\perp\overline{EA}, \overline{RF}\perp\overline{FB}$, 同時注意到 $\Delta CRE\sim\Delta RAE\sim\Delta CBO$.

設 $\overline{CE}=t$，$\overline{RE}=2t$，$\overline{AC}=12 \Rightarrow t：2t=2t：12\ \therefore t=4$



$\Rightarrow \overline{CE}=t=4=\overline{OC}\ \Rightarrow \Delta CER \cong \Delta COB$。

同理 $\Delta DFR \cong \Delta DOA$，從而陰影區域 RAB 的面積為：

$\square OFRE$ 面積+扇形 AOB 的面積$=8^2+\dfrac{64}{4}\pi=64+16\pi$。

I-9.滿足方程組$\begin{cases} ab+5=c \\ bc+1=a \\ ca+1=b \end{cases}$ 且 $a>0$的整數解(a, b, c)為______。

[解]：$\begin{cases} ab+5=c\cdots(1) \\ bc+1=a\cdots(2) \\ ca+1=b\cdots(3) \end{cases}$，$(2)-(3) \Rightarrow c(b-a)=a-b\cdots(*)$

① $a\neq b$, $c=-1$, 代入(1),(2)得：$\begin{cases} ab=-6 \\ a=1-b \end{cases}$ $\therefore b^2-b-6=0 \Rightarrow (b-3)(b+2)=0$, $b=3, -2$

則整數解(a, b, c)為整數解$(3, -2, 1)$或$(-2, 3, -1)$(不合！$a>0$)

② $a=b$,代入(1),(3)得：$\begin{cases} a^2+5=c \\ ac+1=a \end{cases} \Rightarrow a(a^2+5)+1=a\ \therefore a^3+4a+1=0$，顯然 a 不為正數。

$\therefore$滿足方程組的整數解(a, b, c)為$(3, -2, 1)$。

TRML 個人賽-2013 第四回

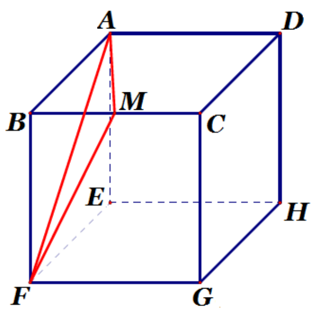
I-10.滿足$\log_2\left(\frac{1}{2^{x+1}}+\frac{1}{3^{x-1}}\right)=x(\log_2 3-2)$的 x 為______。

[解]：$2^{\log_2(\frac{1}{2^{x+1}}+\frac{1}{3^{x-1}})}=2^{x(\log_2 3-\log_2 4)} \Rightarrow \dfrac{1}{2^{x+1}}+\dfrac{1}{3^{x-1}}=2^{\log_2(\frac{3}{4})^x}=(\dfrac{3}{4})^x$

在等式兩邊同乘以 $3^x \Rightarrow \dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2})^x+3=(\dfrac{3}{2})^{2x}\ \therefore 2(\dfrac{3}{2})^{2x}-(\dfrac{3}{2})^x-6=0$，$2t^2-t-6=0$；其中 $t=(\dfrac{3}{2})^x$。

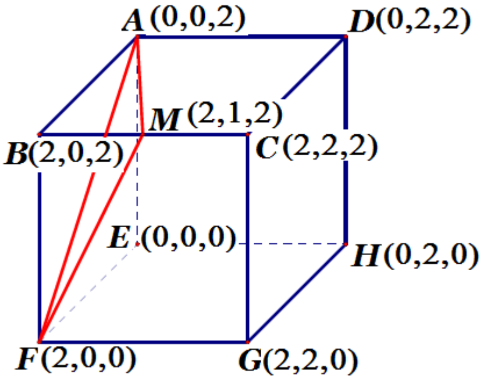
$(2t+3)(t-2)=0\ \therefore t=(\dfrac{3}{2})^x=2, -\dfrac{3}{2}$(不合)$\Rightarrow \log_{\frac{3}{2}}(\frac{3}{2})^x=x=\log_{\frac{3}{2}}2=\dfrac{\log 2}{\log 3-\log 2}$。

I-11.如圖，已知正立方體 $ABCD$-$EFGH$ 的表面積為24。若 M 為$\overline{BC}$邊的中點，則ΔAFM 的面積為______。



[解]：設邊長為 x，則由正立方體 $ABCD\text{-}EFGH$ 的表面積為24，得$24=6x^2$； $x=2$。

定坐標如右圖所示，則$\overrightarrow{AF}=(2,0,-2)$; $\overrightarrow{AM}=(2,1,0)$



$$a\triangle AFM=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AF}|^2|\overrightarrow{AM}|^2-(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AM})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{8\times5-16}=\frac{1}{2}\sqrt{24}=\sqrt{6}$$ 。

I-12.方程式 $x^5-2x^4-5x^3-5x^2-2x+1=0$ 的最大實根為______。

[解]：首先注意到偶次項係數和=奇次項係數和，故方程式必為因式 $x+1$。

$$x^5-2x^4-5x^3-5x^2-2x+1=(x+1)(x^4-3x^3-2x^2-3x+1)=0$$

$$\therefore x=-1,\ 或\ x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0\Rightarrow x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\therefore (x+\frac{1}{x})^2-3(x+\frac{1}{x})-4=0\Rightarrow(x+\frac{1}{x}-4)(x+\frac{1}{x}+1)=0$$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=4$， $x+\frac{1}{x}+1=0$(無實數根) $\Rightarrow x^2-4x+1=0; x=2\pm\sqrt{3}$ $\therefore$最大實根為 $2+\sqrt{3}$ 。