

國立竹山高級中學 102 學年度第一次教師甄試數學科試題卷

一. 填充題:每題 8 分

1. a 為常數, 若直線 $y = ax$ 與曲線 $y = \ln x$ 有交點, 則 a 的最大可能值為 _____

2. $\sum_{k=1}^{10} k^2 C_k^{10} =$ _____

3. 小強在湖邊烤魚, 湖水溫度測定為 20°C , 10 點時他把一根熱金屬棒放入湖中, 10 點 2 分取回金屬棒, 測得其溫度為 40°C , 然後立刻把金屬棒放回湖中, 10 點 6 分時, 取出金屬棒再測得其溫度為 25°C , 則小強第一次把金屬棒放入湖中時其溫度為 _____ $^\circ\text{C}$ (溫度的變化率跟該物體與周圍溫度差成正比)

4. p, q, r, s 為方程式 $2(10x + 13)^2(5x + 8)(x + 1) = 1$ 的四個根且 $pq + rs$ 為實數, 則 $pq + rs =$ _____

5. P 為正 $\triangle ABC$ 內部一點, 若 $\overline{PA} = 5, \overline{PB} = 6, \overline{PC} = 7$, 則 $\triangle ABC$ 的面積為 _____

6. α, β 為方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ 的二根, 令 $f(n) = \alpha^n + \beta^n$, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} =$ _____

7. 將兩股長分別為 x, y 的直角三角形以斜邊為軸旋轉一周, 得一立體 R , 如果此直角三角形的面積為 1, 則 R 的體積最大值為 _____

8. $A(\alpha, \sqrt{3}\alpha), B(\beta, 0), \alpha > 0, \beta > 0, P$ 點在圓: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$ 上則 $\triangle PAB$ 的最小周長為 _____

9. 共有 7 題是非題, 其正確答案有 4 題是 3 題非, 今甲任意猜答也是答 4 題是 3 題非, 求其答對的題數之期望值 _____

10. $P(0, -\sqrt{2}), Q(0, \sqrt{2}), A(a, \sqrt{a^2 + 1}), 0 \leq a \leq 1$, 射線 \overrightarrow{QA} 交拋物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ 於 B , 而 B 在直線 $y = 2$ 上的垂足為 C , 則 $\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BC}$ 為定值求其值 _____

二. 計算證明題: 每題 10 分須列計算過程否則不計分

1. $ABCDE$ 為單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上的內接正五邊形, $A(1, 0), P(1, 1)$ 求 $\overline{PA} \times \overline{PB} \times \overline{PC} \times \overline{PD} \times \overline{PE}$ 的值

2. 若 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 為相異的實數, 試證只有一個次數不超過 n 的多項函數的圖形會通過 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 這 $n + 1$ 個點