99 台中市立東山高中教師甄試試題[1]

計算題(共 10 題, 每題 10 分, 共 100 分)

1. 試敍述一次因次檢驗法, 並證明.
2. 已知 $3^{\log_x 8} = 2^{\log_y 27} = a$ 且 $\log_2 x + \log_3 y = 1$, 求 a 之值.
3. 設 n 爲整數, 且 $\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{n} = \dfrac{\pi}{4}$, 求 n 之值.
4. 已知平面上有三圓 C_1, C_2, C_3, 圓心分別爲 $(0,0)$, $(12,0)$, $(24,0)$, 半徑分別爲 $1,2,4$, 若 L_1 爲 C_1 與 C_2 的內公切線, 且 L_1 的斜率爲正. L_2 爲 C_2, C_3 的內公切線, 且 L_2 的斜率爲負. L_1 與 L_2 的交點爲 $P(x,y)$, 令 $x = p - q\sqrt{r}$ (其中 p,q 爲有理數, r 爲沒有大於 1 的完全平方因數之整數), 求 $p+q+r$ 之值.
5. 設 z_1, z_2 爲複數, 滿足 $|z_1| = |z_2|$, 且 $z_1 - z_2 = 1 - 2i$, 求 $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{|z_1 \cdot z_2|}$ 之值.
6. 求 $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \left(x + \frac{k}{100}\right)^2 C_k^{100} x^k (1-x)^{100-k}$ 之值.
7. 設 $OABC$ 爲四面體, G 爲 $\triangle ABC$ 的重心, M 爲 $\overline{OA}$ 的中點, $\overline{OG}$ 交 MBC 平面於 H,
   (a) 試證若 $\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{OM} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 則 $x+y+z=1$.
   (b) 若 $\overrightarrow{OH} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, 求有序數組 (α,β,γ).
8. 在正六面體每個面分別標上 $1,2,3,4,5,6$, 投擲四次所得點數分別爲 a,b,c,d, 在至少出現一次奇數的情況下, 求 $ab-cd$ 爲偶數的機率爲何?
9. 試作出一有理數數列 $<a_n>$, 使其極限值爲 $\sqrt{2}$.
10. (a) 設 $f(x) = x^2|x-1|$, 試問在 $x=1$ 時,$f(x)$ 是否連續? 是否可微分?
    (b) 試證若函數 $F(x)$ 在 $x=a$ 處可微分, 則 $F(x)$ 在 $x=a$ 處必連續.

參考答案

1.	2.	3.	4.	5.
略	216	47	27	$\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
$\dfrac{399x^2+x}{100}$	(a) 略. (b) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	$\frac{3}{5}$	略	(a) 連續, 但不可微. (b) 略

[1]本試題題目與參考解答, 經 ptt 的 demon 網友同意轉錄. 感謝. :-)