102 年指定考科試題 自然組

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（共佔 76 分）

一、單一選擇題（佔 24 分）

1. 設 z 爲一複數，且 $\dfrac{z-2}{z+2}=i$（其中 $i=\sqrt{-1}$ 爲虛數單位）。
   試問 z 的絕對值 $|z|$ 爲下列哪一個選項？
   (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 1 (4) $\sqrt{2}$ (5) 2 【102 指甲】

答：(5)（第五冊第二章複數）

解：$z-2=i(z+2) \Rightarrow z(1-i)=2+2i \Rightarrow z=\dfrac{2+2i}{1-i} \Rightarrow |z|=\dfrac{|z+2i|}{|1-i|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$

2. 坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y=\log_{10}x$、$y=\log_2 x$ 的圖形於 P、Q 兩點；
   直線 $x=10$ 分別交函數 $y=\log_{10}x$、$y=\log_2 x$ 的圖形於 R、S 兩點。
   試問四邊形 $PQRS$ 的面積最接近下列哪一個選項？（$\log_{10}2\approx 0.3010$）
   (1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13 (5) 14 【102 指甲】

答：(3)（第一冊第三章指數對數）

解：上底 $=\log_2 2-\log_{10}2 \fallingdotseq 1-0.3010 \fallingdotseq 0.699$

下底 $=\log_2 10-\log_{10}10 \fallingdotseq \dfrac{1}{0.3010}-1 \fallingdotseq 2.322$

高 $=10-2=8$

梯形 $PQRS$ 面積 $\approx [0.699+2.322]\times\dfrac{8}{2}\approx 12.08$

3. 袋中有大小相同編號 1 到 8 號的球各一顆。小明自袋中隨機一次取出兩球，
   設隨機變數 X 的值爲取出兩球中的較小號碼。
   若 P_k 表 X 取值爲 k 的機率（$k=1,2,\cdots,8$），試問有幾個 P_k 的值大於 $\dfrac{1}{5}$？
   (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個 【102 指甲】

答：(2)（第二冊第三章機率）

解：$P_1=\dfrac{C_1^1C_1^7}{C_2^8}=\dfrac{7}{28}>\dfrac{1}{5}$，$P_2=\dfrac{C_1^1C_1^6}{C_2^8}=\dfrac{6}{28}>\dfrac{1}{5}$，$P_3=\dfrac{C_1^1C_1^5}{C_2^8}=\dfrac{5}{28}<\dfrac{1}{5}$，

$P_4=\dfrac{C_1^1C_1^4}{C_2^8}=\dfrac{4}{28}<\dfrac{1}{5}$，$P_5=\dfrac{C_1^1C_1^3}{C_2^8}=\dfrac{3}{28}<\dfrac{1}{5}$，$P_6=\dfrac{C_1^1C_1^2}{C_2^8}=\dfrac{2}{28}<\dfrac{1}{5}$，

$P_7=\dfrac{C_1^1C_1^1}{C_2^8}=\dfrac{1}{28}<\dfrac{1}{5}$

4. 考慮所有由1、2、3、4、5、6 各一個與三個 0 所排成形如 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ 對角線均爲 0的三階方陣。今隨機選取這樣一個方陣，試問其行列式值 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$ 爲奇數的機率爲下列哪一個選項？

(1) $\frac{1}{20}$　(2) $\frac{1}{10}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{9}{10}$　(5) $\frac{19}{20}$　【102 指甲】

答：(2) **（第四冊第一章三階行列式）（第二冊第三章機率）**

解：$P\left(ade+bcf\ 爲奇數\right)=\frac{3!\times 3!\times 2}{6!}=\frac{1}{10}$

二、多選題（佔 40 分）

5. 令 $A(-2,0)$、$B(0,1)$、$C(2,1)$、$D(4,3)$爲坐標平面上四點。請選出正確的選項。
   (1) 恰有一直線通過 A、B、C 三點
   (2) 恰有一圓通過 A、B、D 三點
   (3) 恰有一個二次多項式函數的圖形通過 B、C、D 三點
   (4) 恰有一個三次多項式函數的圖形通過 A、B、C、D 四點
   (5) 可找到兩平行直線，其聯集包含 A、B、C、D 四點　【102 指甲】

答：(3)(4)(5) **（第一冊第二章多項函數）**

解：(1) 斜率 $m_{AB}=\frac{1}{2}\neq$ 斜率 $m_{BC}=\frac{0}{2}$，無法決定一直線

(2) 斜率 $m_{AB}=\frac{1}{2}=$ 斜率 $m_{BD}=\frac{2}{4}$，無法決定一圓

(3) B,C,D 可決定二次函數 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$

(4) B,C,D,E 可決定三次函數 $y=\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{8}x^2+1$

(5) 一直線過 A、B、D 三點，另一平行直線過 C 點

6. 設 c 爲實數，E_1、E_2、E_3 皆爲坐標空間中的平面，其方程式如下：
   E_1 ：$cx+y=c$ 、E_2 ：$cy+z=0$ 、E_3 ：$x+cz=1$
   已知 E_1、E_2、E_3 有一個交點的 z 坐標爲 1，請選出正確的選項。
   (1) $(1,0,0)$是 E_1、E_2、E_3 的一個交點　(2) E_1、E_2、E_3 有無窮多個交點
   (3) E_1、E_2、E_3 中一定有兩個平面重合　(4) $c=1$
   (5) E_1、E_2、E_3 有一個交點的 z 坐標爲 2　【102 指甲】

答：(1)(2)(5) **（第四冊第二章空間中的直線與平面）**

解：(1) $(1,0,0)$代入三式均合

(2) E_1、E_2、E_3 已有兩交點$(1,0,0)$、$(p,q,1)$，故爲無限多解

(3)(4) $\Delta=\begin{vmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix}=c^3+1=0 \Rightarrow c=-1$

$E_1: -x+y=-1$，$E_2: -y+z=0$，$E_3: x-z=1$

(5) 當 $z=2$，$x=3$，$y=2$ 成立

7. 令 $f(x)=x^3-x^2-2x+1$。設 a,b,c 爲方程式 $f(x)=0$ 的三個實根，且 $a<b<c$，請選出正確的選項。

(1) 極限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 存在

(2) a,b,c 至少有一個在 0 與 1 之間

(3) $a,a^2,a^3,\cdots,a^n,\cdots$ 爲收斂數列

(4) $b,b^2,b^3,\cdots,b^n,\cdots$ 爲收斂數列

(5) $c,c^2,c^3,\cdots,c^n,\cdots$ 爲收斂數列 【102 指甲】

答：(2)(4) **（第六冊第一章極限與函數）**

解：由勘根定理知，三實根 $-2<a<-1<0<b<1<c<2$

(1) $f(x)$ 無 $(x-1)$ 之因式，故 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 不存在

(3)(5) 均發散

8. 考慮函數 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，其中 x 爲任意實數。請選出正確的選項。

(1) $f(-x)=f(x)$ 對所有實數 x 均成立

(2) f 的最大值爲 $\sqrt{2}$

(3) f 的最小值爲 0

(4) $f\left(\dfrac{\pi}{10}\right)>f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$

(5) 函數 f 的（最小正）週期爲 π 【102 指甲】

答：(1)(2) **（第五冊第二章三角函數）**

解：(1) $f(-x)=|\sin(-x)|+|\cos(-x)|=|-\sin x|+|\cos x|=f(x)$

(2)(3) $1\le|\sin x|+|\cos x|\le\sqrt{2}$

(4) 當 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$ 時，$f(x)$ 遞增，故 $f\left(\dfrac{\pi}{10}\right)<f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$

(5) 應爲 $\dfrac{\pi}{2}$

9. 考慮向量$\vec{u}=(a,b,0)$、$\vec{v}=(c,d,1)$，其中$a^2+b^2=c^2+d^2=1$。
請選出正確的選項。
(1) 向量$\vec{v}$與z軸正向的夾角恆爲定值(與c、d之值無關)
(2) $\vec{u}\cdot\vec{v}$的最大值爲$\sqrt{2}$
(3) $\vec{u}$與$\vec{v}$夾角的最大值爲$135°$
(4) $ad-bc$的值可能爲$\frac{5}{4}$
(5) $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$的最大值爲$\sqrt{2}$ 【102 指甲】

答：(1)(3)(5) **（第四冊第一章空間向量）**

解：(1) $\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{z}}{|\vec{u}||\vec{z}|}=\frac{(c,d,1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2}\cdot 1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$與$c$、$d$無關

(2) $\left[a^2+b^2\right]\left[c^2+d^2\right]\geq[ac+bd]^2$ (柯西不等式)

$\Rightarrow -1\leq ac+bd\leq 1\Rightarrow -1\leq\vec{u}\cdot\vec{v}\leq 1$

(3) 當$\vec{u}\cdot\vec{v}=-1$時，$\cos\phi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{-1}{1\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

表$\vec{u}$、$\vec{v}$夾角最大爲$135°$

(4) $\left[a^2+b^2\right]\left[d^2+(-c)^2\right]\geq[ad-bc]^2$ (柯西不等式)

$\Rightarrow -1\leq ad-bc\leq 1$，故$ad-bc\neq\frac{5}{4}$

(5) 當$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，即$\vec{u}\perp\vec{v}$時，

$\vec{u}$與$\vec{v}$所圍平行四邊形面積最大爲$1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$

三、選填題（佔 12 分）

A. 設A、B、C、D爲空間中四個相異點，且直線CD垂直平面ABC。
已知$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=10$，$\sin\angle ABC=\frac{4}{5}$，且$\angle ABC$爲銳角，則$\overline{AD}=$＿＿＿＿＿。
(化成最簡根式) 【102 指甲】

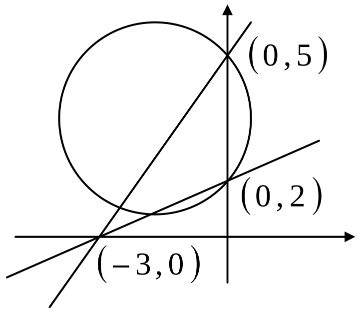
答：$6\sqrt{5}$ **（第三冊第一章三角）（第四冊第一章空間概念）**

解：$\cos\angle ABC=\frac{3}{5}=\frac{10^2+10^2-\overline{AC}^2}{2\times 10\times 10}\Rightarrow\overline{AC}=\sqrt{80}$

$\overline{AD}=\sqrt{10^2+\left(\sqrt{80}\right)^2}=6\sqrt{5}$

B. 設 m 為實數。若圓 $x^2+y^2+4x-7y+10=0$ 與直線 $y=m(x+3)$ 在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a<m<b$，則 $a=$________，$b=$________。(化成最簡分數) 【102 指甲】

答：$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{5}{3}$ **（第三冊第二章直線與圓）**



解：圓 $(x+2)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$

與 y 軸交於 $(0,2)$，$(0,5)$

所求 $a=\dfrac{2-0}{0-(-3)}=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{5-0}{0-(-3)}=\dfrac{5}{3}$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

一、設 $p(x)$ 為一實係數多項式，其各項係數均大於或等於 0。

在坐標平面上，已知對所有的 $t\geq 1$，函數 $y=p(x)$、$y=-1-x^2$ 的圖形與直線 $x=1$、$x=t$ 所圍成有界區域的面積為 $t^4+t^3+t^2+t+C$ (其中 C 為常數)。

(1) 試說明 $p(x)>-1-x^2$ 對所有的 $x\geq 1$ 均成立。(2 分)

(2) 設 $t\geq 1$，試求 $\int_1^t\left(-1-x^2\right)dx$。(3 分)

(3) 試求 C。(2 分)

(4) 試求 $p(x)$。(5 分) 【102 指甲】

答：(2) $-\dfrac{t^3}{3}-t+\dfrac{4}{3}$ (3) $C=-4$ (4) $p(x)=4x^3+2x^2+2x$

（第六冊第二章多項式的微積分）

解：(1) $\because$ $p(x)$ 各項係數均 ≥ 0，故 $p(x)\geq 0$，恆成立

又 $y=-1-x^2<0$ 恆成立

$\therefore$ $p(x)>-1-x^2$ 恆成立，當 $x\geq 1$ 亦然

(2) $\int_1^t\left(-1-x^2\right)dx=\left[-x-\dfrac{x^3}{3}\right]_1^t=-\dfrac{t^3}{3}-t+\dfrac{4}{3}$

(3) $\int_1^1\left(p(x)+1+x^2\right)dx=1^4+1^3+1^2+1+C\Rightarrow 0=4+C\Rightarrow C=-4$

(4) 令 $p(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$

$\int_1^t\left(p(x)+1+x^2\right)dx=\left[\dfrac{\alpha}{4}x^4+\dfrac{\beta+1}{3}x^3+\dfrac{\gamma}{2}x^2+\dfrac{\delta+1}{1}x\right]_1^t$

$=\dfrac{\alpha}{4}t^4+\dfrac{\beta+1}{3}t^3+\dfrac{\gamma}{2}t^2+(\delta+1)t-\left(\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{\beta+1}{3}+\dfrac{\gamma}{2}+\dfrac{\delta+1}{1}\right)$

$=t^4+t^3+t^2+t-4$

故 $\alpha=4$，$\beta=2$，$\gamma=2$，$\delta=0$

即 $p(x)=4x^3+2x^2+2x$

二、設 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 為坐標平面上兩點，C 為直線 AB 外一點。
經平面線性變換 M 作用後，
A 被映射至 $A'\left(1,\sqrt{2}\right)$，$B$ 被映射至 $B'\left(-1,\sqrt{2}\right)$，而 C 被映射至 C'。
(1) 試問變換 M 的矩陣為何?(4 分)
(2) 試證明變換 M 將 ΔABC 的重心映射至 $\Delta A'B'C'$ 的重心。(4 分)
(3) 若 ΔABC 的面積為 3，試求點 C' 與直線 $A'B'$ 的距離。(4 分)　　【102 指甲】

答：(1) $M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$　(2) $6\sqrt{2}$ **（第四冊第三章矩陣）**

解：(1) $M\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\Rightarrow M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$

(2) 令 $C(x,y)$，則 $C'\left(x-y,\sqrt{2}x+\sqrt{2}y\right)$

ΔABC 之重心 $\left(\dfrac{x+1}{3},\dfrac{y+1}{3}\right)$，$\Delta A'B'C'$ 之重心 $\left(\dfrac{x-y}{3},\dfrac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+2\sqrt{2}}{3}\right)$

$\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{x+1}{3}\\ \dfrac{y+1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{x-y}{3}\\ \dfrac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+2\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix}$，得證

(3) ΔABC 面積 $=3$，$\det(M)=2\sqrt{2}\Rightarrow\Delta A'B'C'$ 面積 $=6\sqrt{2}$
$\overline{A'B'}=2$，故 $d\left(C',\overleftrightarrow{A'B'}\right)=\Delta A'B'C'$ 之高 $=6\sqrt{2}$