

臺北市立明倫高級中學 102 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試試題

<注意> 共有 19 題，第 1~6 題，每題 5 分；第 7~17 題，每題 6 分；第 18~19 題每題 12 分；

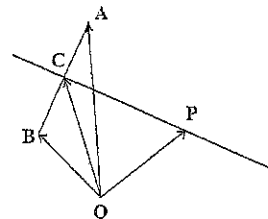
請標明題號，將計算證明過程及答案寫在答案卷上

01. 觀察五架公共電話，以 $P(n)$ 表示有 n 架已在使用之機率，我們發現若 $0 \leq n \leq 5$ ，則 $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n P(0)$ ；

若 $n \geq 6$ 時，則 $P(n) = 0$ ，則五架公共電話皆有人在使用的機率為？

02. 設平行四邊形 $ABCD$ ， E 在 \overline{AD} 上， $\overline{AE} = 2\overline{ED}$ ， F 在 \overline{AB} 上， $\overline{AF} = 3\overline{FB}$ ，若 \overline{CF} 與 \overline{BE} 交於 P 點，且 $\overline{AP} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ ，則數對 $(x, y) = ?$

03. 有一光束由點 $P(4, 2, -1)$ 前進到鏡面 M 上的點 $A(1, 2, 3)$ 反射後，通過另一點 $Q(7, -6, 3)$ ，則鏡面 M 的方程式為？



04. 如圖， O, A, B 是平面上的三點，設 P 為 \overline{AB} 的垂直平分線 CP 上的任一點，若 $|\overline{OA}| = 4$ ， $|\overline{OB}| = 2$ ，則 $\overline{OP} \cdot (\overline{OA} - \overline{OB}) = ?$

05. 在 $\triangle ABC$ 中，三中線長分別為 $m_a = 13, m_b = 14, m_c = 15$ ，求 $\triangle ABC$ 之面積？

06. 拋物線上有焦弦 \overline{CD} 通過焦點 F ，若 $\overline{CF} = 2$ ， $\overline{DF} = 5$ ，則此拋物線的正焦弦長為？

07. 地面(設為 xy 平面)上有大小兩飛碟球，大飛碟球球面方程式為 $S_1: (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-9)^2 = 81$ ，小飛碟球球面方程式為 $S_2: (x-11)^2 + (y+22)^2 + (z-4)^2 = 16$ ，若兩飛碟球在地面(即 xy 平面)上滾動，大飛碟球每秒滾動 2 單位，小飛碟球每秒滾動 3 單位，試問最快幾秒後兩飛碟球會相撞？

08. 已知兩複數 z_1 與 z_2 滿足 $|2z_1 - 10| = |3z_1 + 30i|$ ， $|iz_2 - 15| = 4$ ，則 $|z_1 - z_2|$ 的可能最大值為？

09. 設 m 為實數，已知四次方程式 $3x^4 - 4mx^3 + 1 = 0$ 無實根，求 m 的範圍。

10. 若 $f(x) = 2(3x-2)^7 - 4(3x-2)^6 - 61(3x-2)^5 + 47(3x-2)^4 + 8(3x-2)^3 - 4(3x-2)^2 + 28(3x-2) - 8$ ，則
(1) $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為？ (2) $f(x)$ 的奇次項係數和為？ (本題每小題 2 分)

11. 兩變數 X 與 Y 的 n 筆樣本資料 $(x_1, y_1) \sim (x_n, y_n)$ ，我們利用最小平方方法求出 Y 對 X 的迴歸直線的過程中，欲使 $f(a, b) = (a+8b-11)^2 + (a+9b-12)^2 + (a+11b-8)^2 + (a+12b-9)^2$ 有最小值，則
(1) 此時的數對 $(n, a, b) = ?$ (2) Y 對 X 的迴歸直線為何？ (3) 兩變數 X 與 Y 的相關係數為何？

12. 暑期輔導期間，高三導師想要規劃班級的自習課使用，輔導課一週五天，自習時段每天有兩個時段，如下圖一所示：
每天有兩個時段，每個時段只安排一科，每天安排兩個不同科目。
若國文、英文、數學各兩個時段，物理、化學、生物、地科各佔一個時段，則導師可以有幾種不同的安排方式？

317	一	二	三	四	五
早自習					
第七節					

13. 設 a, b, c 皆為正實數，試證明 $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$

14. 證明：在坐標平面上，點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離為 $d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

15. 設 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = ?$

16. 令 $A = \{(x, y, z) | x, y, z \in \{-1, 0, 1\}\}$ ，若有 k 個正三角形其頂點 (x, y, z) 都在 A 內，有 t 個正四面體其頂點 (x, y, z) 都在 A 內，則 $k = ?$ ， $t = ?$

17. 一般老師教學時，遇到「求過 $x^2 + y^2 - 4x - 28 = 0$ 與 $x^2 + y^2 - 4x - 20y + 52 = 0$ 兩圓交點，且過 $(1, 1)$ 之圓方程式為？」題目，多使用圓系方程，假設所求之圓為 $(x^2 + y^2 - 4x - 20y + 52) + k(x^2 + y^2 - 4x - 28) = 0$ ，其中 k 為任意實數。請問您，若有同學提問說：為何可以這樣假設？此時，您會使用最淺顯易懂的說明方式為何？請說明之

18. 給定直線 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$ 及一點 $P(1, 6, -2)$ ，試用各種不同的方法，求直線 L 上的一點 Q 的坐標，使得 \overline{PQ} 為最小，並求出最小值。(說明：每種不同的方法可得 4 分，超過 12 分者，以 12 分計。)

19. 設 x 為任意實數，若 $k = \frac{\sin x + 3}{\cos x + 2}$ ，試用各種不同的方法，求 k 值的範圍。
(說明：每種不同的方法可得 4 分，超過 12 分者，以 12 分計。)

臺北市立明倫高級中學 102 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試試題參考答案卷

1. $\frac{1}{63}$

2. $(\frac{9}{14}, \frac{1}{7})$

3. $3x - 2y - 2z = -7$

4. 6

5. 112

6. $\frac{13}{5}$

7. $\frac{40}{7}$

8. $9 + 6\sqrt{5}$

9. $-1 < m < 1$

10. (1) 2 (2) 3

11. (1) $(4, 18, \frac{-4}{5})$ (2) $y = 18 - \frac{4}{5}x$ (3) $r = -\frac{4}{5}$

12. 322560

13. 略

14. 略

15. 2

16. $k = 80, t = 18$

17. 略

18. $Q(-1, 4, -1)$, \overline{PQ} 最小值為 3

19. $\frac{6-2\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$