

臺北市立陽明高級中學〈高中部〉102 學年度第 1 次正式教師甄選

數學科甄選試題

1. (1)(5%)請證明三角形的三高交於一點。

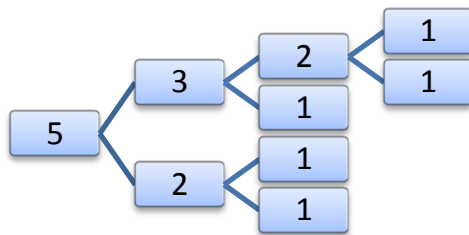
(2)(5%)若點 D、E、F 依序為 $\triangle ABC$ 三邊 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 三邊的垂足，求證： $\triangle ABC$ 的垂心等於 $\triangle DEF$ 的內心。

2. (10%)ABCD 為圓內接四邊形，四邊邊長依序為 a、b、c、d，請證明 ABCD 的面積為

$$S(a, b, c, d) = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}$$

3. 將 n 顆小石頭分成兩堆，每堆至少一顆，然後將分成兩堆所含的石頭個數相乘，乘積記為 a_1 ；接著將含有不只一顆石頭的任意一堆再分成兩堆，將分成兩堆所含的石頭數相乘，乘積記為 a_2 ；此步驟重複到每堆石頭都只剩一顆為止(假設最後一次乘積為 a_m)，求

$a_1 + a_2 + \dots + a_m$ 的和。舉例來說，當 $n=5$ 時，可以分成如下圖所示，



$$s(5) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 10。$$

請問：

(1)(2%) $s(11) = ?$

(2)(3%) $s(n) = ?$ (以 n 表示, $n \geq 2$)

(3)(5%)請證明第(2)小題的猜測。

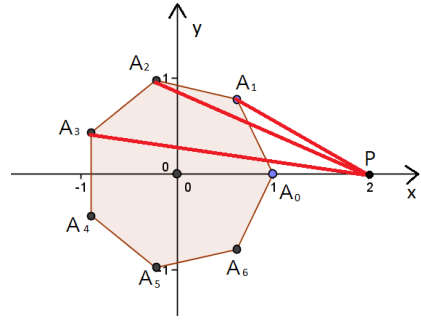
4. (1)(5%)若 $\omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ，求 $\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1-\omega^2} + \frac{1}{1-\omega^3} + \frac{1}{1-\omega^4} + \frac{1}{1-\omega^5} + \frac{1}{1-\omega^6} = ?$

(2)(5%)如右圖， $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 為以原點 $(0,0)$ 為中

心的正七邊形，且頂點 A_0 座標為 $(1,0)$ ，

點 $P(2,0)$ 。求線段長度乘積 $\overline{PA_1} \times \overline{PA_2} \times \overline{PA_3}$

的值為何？



5、(10%)設有編號 $1, 2, 3, \dots, n$ 的 n 個盒子，在第 k 個盒子內裝有 $n+k$ 個白球與 $n-k$ 個黑球 ($1 \leq k \leq n$)，現在隨便選出一個盒子，且由此盒子內每次隨機抽取一個球，取後放回，連取 3 次，除了 3 次皆為同色球外皆可獲獎，假設獲獎的機率為 P_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = ?$

6、某次選舉，候選人委託 A 、 B 兩民調機構調查其支持度。結果如下：在 95% 信心水準之下， A 、 B 兩民調機構得到候選人支持度的信賴區間分別為 $[0.52, 0.60]$ 、

$[0.42, 0.48]$ ，試問：

(1) (5%) A 民調的抽樣樣本數 n_1 ， B 民調的抽樣樣本數 n_2 ，請比較 n_1 、 n_2 大小。

(2) (5%) A 民調機構在 95% 信心水準之下，欲使誤差在 3% 以內，則須抽樣多少個樣本？

7、(15%)有一半徑為 $2\sqrt{2}$ ，高為 $2\sqrt{3}$ 的圓柱體被一平面所截。已知平面截過圓柱體底面的圓心且與底面夾 60° 角，試求：此圓柱體被平面所截之較小部份的體積。

8. (1)(10%)請利用夾擠定理，證明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

(2)(5%)請利用第(1)小題的結果，證明單位圓的面積為 π 。

9、(10%)因應 12 年國教「特色課程」中，關於數學科之教材開發，就您所學(研究)，請設計一份教材：

內含：(1)主題名稱 (2)教學目標 (3)教材內容 (4)實施方式與評量方法

(5)推廣與延伸