

國立臺中女子高級中學 102 學年度第一學期教師甄選數學科試題

壹、填充題（每題 6 分）

- 試求 $\sum_{k=0}^{2012} \frac{C_k^{2012}}{C_k^{2013}} - \sum_{k=0}^{2011} \frac{C_k^{2011}}{C_k^{2012}}$ 之值為_____。
- 給定數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = 3a_{n-1} - 2(-1)^{n-1}, n=2,3,4,\dots \end{cases}$ 。試問 a_{102} 為_____位數。(其中 $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$)
- 設 $\omega = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$, $f(x) = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^5)(x - \omega^9)(x - \omega^{11})(x - \omega^{13})$, 則 $f(x)$ 除以 $x - 2$ 的餘式為_____。
- 已知 $f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 其中 $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 則滿足 $f(-4)$ 為正整數的函數 $f(x)$ 共有_____個。
- 求由五個平面： $2x + 2y + z = 9$ 、 $x + 2y + 2z = 9$ 、 $x = 0$ 、 $y = 0$ 及 $z = 0$ 所圍成之立體圖形的體積為_____。
- 設函數 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 處沒有定義，但對所有非零實數 x 滿足 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 3x$ 。則方程式 $f(x) = f(-x)$ 的解為_____。
- 在坐標平面上，有一直線 L 過點 $P(2, 1)$ ，且與 x 軸、 y 軸之正向分別交於 A 、 B 兩點， O 為原點，求 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB}$ 之最小值為_____。
- 已知坐標平面上點 $P_n(x_n, y_n)$ ，滿足 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (7x_n + 3y_n, 3x_n + 7y_n)$ ， n 為非負的整數，其中 $(x_0, y_0) = (1+a, 1-a)$ ， $a \in R$ ，且 $a \neq 0$ 。若 O 表坐標平面的原點，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \log \overline{OP}_n$ 之值為_____。
- 設 $\triangle ABC$ 之三邊長分別為 $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 6, \overline{CA} = 5$ ，若 H 為 $\triangle ABC$ 之垂心，過 H 點做一直線分別交 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 D 、 E 兩點，試求 $\triangle ADE$ 面積的最小值為_____。
- 設正立方體中，四條最長的對角線與非零向量 $\vec{v} = (x, y, z)$ 之夾角分別為 α 、 β 、 γ 、 δ ，其中 x 、 y 、 z 為任意實數，則 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta =$ _____。
- $\frac{3^4 + 2^6}{7^4 + 2^6} \times \frac{11^4 + 2^6}{15^4 + 2^6} \times \frac{19^4 + 2^6}{23^4 + 2^6} \times \frac{27^4 + 2^6}{31^4 + 2^6} \times \frac{35^4 + 2^6}{39^4 + 2^6} \times \frac{43^4 + 2^6}{47^4 + 2^6} =$ _____。
- 求 $[\frac{10^{2010} + 2011}{10^{670} + 1}]$ 的末三位數字為_____。(註： $[]$ 為高斯符號)

壹、填充題解答

1. $\frac{1}{2}$	2. 49	3. 43	4. 1093
5. $\frac{81}{4}$	6. 送分	7. 10	8. 2
9. $\frac{9\sqrt{7}}{49}$	10. $\frac{4}{3}$	11. $\frac{1}{481}$	12. 001