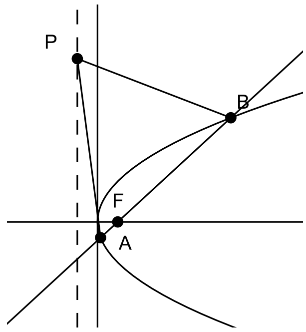
$\boxed{\text{題目:}}$

有一拋物線 $y^2=x$ 過焦點 F 的直線交拋物線於 A,B 兩點, 有一點 P 在準線上且 A,B,P 形成正三角形, 問 $\dfrac{FA}{FB}$ 的值爲? (99中科實中)

$\boxed{\text{解答:}}$



令 $A(t^2,t)\,B(k^2,k)$, 如圖 $t<0,k>0$, 因爲 $\overline{AB}$ 通過焦點, 所以 $tk=-\dfrac{1}{4}$. (此爲套用 http://math.pro/db/thread-710-1-1.html 的結果)

以 A 爲中心, 將 B 逆時針旋轉 60° 可得 P 點對應的複數坐標爲
$(t^2+it)+\left\{(k^2-t^2)+i(k-t)\right\}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$, 取其實部爲 $\dfrac{t^2+k^2-\sqrt{3}(k-t)}{2}$,
因 P 點在準線上, 所以

$$\begin{aligned}
& \frac{t^2+k^2-\sqrt{3}(k-t)}{2}=-\frac{1}{4} \\
\Rightarrow\quad & (k-t)^2+2tk-\sqrt{3}(k-t)=-\frac{1}{2} \\
\Rightarrow\quad & (k-t)^2+2\times\left(-\frac{1}{4}\right)-\sqrt{3}(k-t)=-\frac{1}{2} \\
\Rightarrow\quad & k-t=0 \text{ 或 } \sqrt{3}\text{ , 其中 } 0 \text{ 不合} \\
\Rightarrow\quad & k-t=\sqrt{3} \\
\Rightarrow\quad & (k+t)^2=(k-t)^2+4kt=2 \\
\Rightarrow\quad & k+t=\sqrt{2} \\
\Rightarrow\quad & \begin{cases} k=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \\ t=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

題目所求 $\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{|k|}{|t|}=\dfrac{k}{-t}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}=5+2\sqrt{6}.$

因爲題目沒有說 $\overline{FA},\overline{FB}$ 哪一段比較長, 所以如果把 A,B 位置互換,
則結果爲 $\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}=5-2\sqrt{6}$, 所以答案是 $5\pm 2\sqrt{6}$.