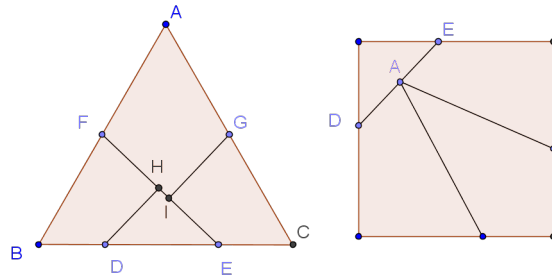


填充題(題號可能錯誤) (每題 7分, 共84分)

1. 設  $f(x)$  為一 317 次多項式滿足  $f(k) = \frac{1}{k}, k = 1, 2, 3, \dots, 318$ , 則  $f(320) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 平面上坐標上,  $\Gamma$  為所有的點  $P$  滿足到直線  $x = 4$  與  $(1, 0)$  的距離和為 5 之曲線。試求  $b$  的範圍, 使得  $\Gamma$  上恰有三組點, 關於點  $(b, 0)$  對稱。
3. 若函數  $f(x)$  滿足  $f(1) = 1, f(x) + f(1-x) = 1, f(\frac{x}{6}) = \frac{1}{2}f(x)$ , 其中  $0 \leq x \leq 1$ , 且對  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ , 有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , 則  $f(\frac{1}{2013}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4.  $\sum_{k=1}^{2013} \left[ \sqrt[5]{\frac{2013}{k}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 ( $[ ]$  為高斯符號)
5. 如圖, 若邊長為 2 的正三角形, 可經拼剪為正方形, 則  $\overline{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



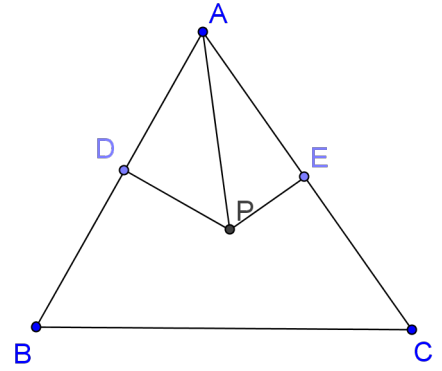
6. 空間中, 有四個球兩兩相切(外切), 半徑分別為 2, 3, 2, 3。有另一球與四球皆外切, 則其半徑 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
7.  $OABC$  為一邊長為 1 的正四面體,  $D, E$  分別為  $\overline{AB}, \overline{OC}$  中點。兩歪斜線  $\overline{OD}$  和  $\overline{BE}$  的距離為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 若  $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$  有實數解, 則  $a^2 + b^2$  的最小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 不等式  $\frac{2x^2-4x+3}{(x-1)^3} > x^3 + 2x$  的實數解為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 若  $a, b, c$  為正實數, 則  $\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}$  的最小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 小明寫  $n$  封信分別給  $n$  個朋友 ( $n \geq 3$ ), 有  $n$  個寫好名字的信封, 一次寫兩封, 分別隨便裝入兩個信封內, 則裝錯信之數量的期望值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 設  $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t} dt$ , 則  $\frac{d}{dx}F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

計算題 (共36分)

1. 已知方程式  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  有三實根, 且  $-2 \leq a + b + c \leq 0$ 。求證: 此方程式必有一實根  $\alpha$  滿足  $0 \leq \alpha \leq 2$ 。(10分)

2. 如右圖，銳角三角形  $\triangle ABC$  中， $D$ 、 $E$  分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上。過  $D$ 、 $E$  分別作  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  之垂線，交於  $\triangle ABC$  內部一點  $P$ 。

試證： $\overline{AP} \cdot (\overline{BC} - \overline{DE}) \geq \overline{BD} \cdot \overline{AE} + \overline{CE} \cdot \overline{AD}$ 。(1x分)



3. 令  $S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ ,  $f: S \rightarrow S$  且  $f(x, y, z) = (xyz, xy + yz + zx, x + y + z)$ 。  
求  $f(f(x, y, z)) = (x, y, z)$  的所有解。(1x分)