

求 $13^{22} + 2 \times 13^2 + 3$ 被 $13^4 - 13^2 + 1$ 除，所得的餘數為？

解： $(x^{22} + 2 \times x^2 + 3) = (x^4 - x^2 + 1)Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中 $x = 13$

$$\text{令 } (x^4 - x^2 + 1) = 0, \text{ 則 } (-x^4 + x^2 - 1) = 0$$

$$\text{且 } (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = x^6 + 1 = 0, \text{ 亦即 } x^6 = -1,$$

$$\text{故原式左側} \Rightarrow x^4 (x^6)^3 + 2 \times x^2 + 3 = -x^4 + 2 \times x^2 + 3$$

$$= (-x^4 + x^2 - 1) + x^2 + 4 = x^2 + 4$$

$$\text{故原式右側} \Rightarrow (0)Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

故餘式為 $x^2 + 4$ ，故餘數為 $13^2 + 4 = 173$