11　三角　　2014.2.8

11.1　面積

506.　(1) 已知一三角形的三高長爲 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$, 求此三角形的面積。

(2) 設 $\triangle ABC$ 之三高爲 $h_a=6, h_b=4, h_c=3$，則 $\triangle ABC$ 的面積爲 ________。

(3) 設 $\triangle ABC$ 的三高爲 6, 4, 3，則此 $\triangle$ 的外接圓半徑爲 ________。

答. (1) $\frac{\sqrt{3}}{45}$ (2) $\frac{16\sqrt{15}}{5}$ (3) $\frac{64}{15}$　　(99萬芳高中、99萬芳高中代理、100嘉義高中)

解(1) 三邊長比爲 $3:5:7 \Rightarrow \cos\theta = \frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 5} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ 兩鄰邊長爲 $\frac{1}{3\sin\theta}$, $\frac{1}{5\sin\theta}$，面積爲 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15\sin\theta} = \frac{\sqrt{3}}{45}$。

另解(1) 令三邊長爲 $3t, 5t, 7t$。則 $\triangle = \frac{t}{2} = t^2\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}} \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{3}}{45} \Rightarrow \triangle = \frac{\sqrt{3}}{45}$。

507.　(1) 若 $\triangle ABC$ 的三中線長分別爲 5、$\sqrt{52}$、$\sqrt{73}$ 的面積等於 ________。

(2) $\triangle ABC$ 之三中線長爲 6, 15, 18，則 $\triangle ABC$ 面積爲何？

(3) 設有一三角形的三邊中線長分別爲 $6, 9, 12$，則此三角形的面積 = ________。

答. (1) 24 (2) $9\sqrt{39}$ (3) $9\sqrt{15}$。　　(99華江高中、98中興高中、98嘉義高中)

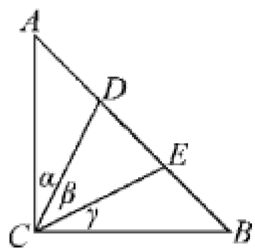
類題. 見 97楊梅高中1。

508. $\triangle ABC$ 中，D 爲 $\overline{BC}$ 上一點，若 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=2$, $\overline{AC}=6$ 且 $\angle BAD$ 爲 $\angle DAC$ 的一半，則 $\overline{BD}=$ ________。　　(100台中二中)

答. $\sqrt{11-2\sqrt{13}}$。

解. 令 $\angle BAD = x$。由 $\triangle ABD + \triangle ADC = \triangle ABC$ 得 $6\sin x + 12\sin 2x = 18\sin 3x$。
約掉一個 $\sin x$，換成 $\cos x$ 得 $3\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$ (負不合，因 $0<3x<\pi$)。由餘弦定理得 $\overline{BD} = \sqrt{11-2\sqrt{13}}$。

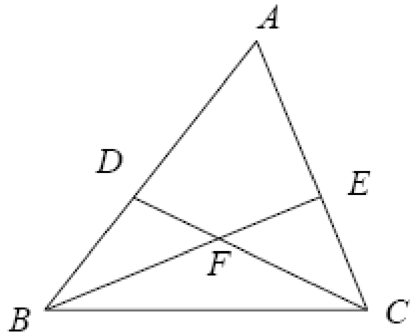
509. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$, $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$, $\angle ACD = \alpha$, $\angle DCE = \beta$, $\angle ECB = \gamma$，求 $\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}$。　　(100台南二中、99屏北高中)



答. $\frac{1}{3}$。

解. 分子分母同乘 $\overline{AC}\cdot\overline{DC}\cdot\overline{EC}\cdot\overline{BC}$，可得 $\frac{(\frac{2\triangle}{3})^2}{\frac{2\triangle}{3}\cdot(2\triangle)} = \frac{1}{3}$。

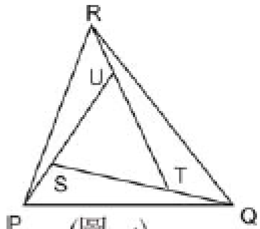
510. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{CD}$ 交 $\overline{BE}$ 於 F，已知 $\triangle BDF$ 面積爲 10，$\triangle BCF$ 面積爲 20，$\triangle CEF$ 面積爲 16，則四邊形區域 $ADFE$ 之面積爲 ________。 (100苑裡高中)



答. 44。

解. 連 $\overline{AF}$，設 $\triangle ADF = x, \triangle AEF = y$，
則 $\frac{x}{10} = \frac{y+16}{20}, \frac{y}{16} = \frac{x+10}{20}$。
解得 $(x, y) = (20, 24)$ 。
因此所求 $= 44$。

511. 在(圖一)中，$\overline{TQ} = \frac{1}{2}\overline{ST}, \overline{UR} = \frac{1}{3}\overline{TU}$ 而 $\overline{SP} = \frac{1}{4}\overline{SU}$。已知 $\triangle STU$ 的面積是 1。則 $\triangle PQR$ 的面積爲 ____。 (98嘉義高中)



(圖一)

答. $\frac{59}{24}$。

解. 利用面積公式 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$，再以補角正弦相等及邊長比例求得三小塊面積分別爲 $\frac{3}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{12}$。$\therefore\ 1 + \frac{3}{8} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12} = \frac{59}{24}$。

512. $\star$ 已知 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，且 $\overline{AH} = l, \overline{BH} = m, \overline{CH} = n$，三角形的三邊長 $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$，試證：$\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} = \frac{abc}{lmn}$。 (99台中二中)

證. 正弦定理有 $\frac{abc}{4R} = \triangle$。注意 $\angle BHC = \pi - \angle A, \Rightarrow \triangle ABC$ 與 $\triangle BCH$ 的外接圓半徑相同，同理 $\triangle ABH, \triangle CAH$ 亦然。再由面積 $\triangle ABC = \triangle ABH + \triangle BCH + \triangle CAH$，以正弦所得之式代入得 $\frac{abc}{4R} = \frac{lmc}{4R} + \frac{mna}{4R} + \frac{nlb}{4R}$，再同乘 $\frac{4R}{lmn}$，即得證。

513. $\star$ $\triangle ABC$ 中，設 a, b, c 分別爲其三內角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊，$\triangle$ 爲其面積，而 R 爲其外接圓半徑，

(1) 試證：$\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4\triangle}$

(2) 利用 (1) 證明：若 $\cot A, \cot B, \cot C$ 成等差數列，則 a^2, b^2, c^2 亦成等差數列。

(3) 如圖：設 $\triangle ABC$ 內部一點 P，使得 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$，試利用 (1) 證明：$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$。

(4) 試證：$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\triangle$。 (97松山家商)

證. (1) 餘弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$， $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\triangle}$。

(2) 用 (1)，由 $\frac{b^2+c^2-a^2}{4\triangle}+\frac{b^2+a^2-c^2}{4\triangle}=2\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{4\triangle}$ 整理可得 $a^2+c^2=2b^2$，移項得證。

(3) 以 (1) 表示 $\cot\alpha=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AP}^2-\overline{PB}^2}{4\triangle PAB}=\frac{\overline{BP}^2+\overline{BC}^2-\overline{PC}^2}{4\triangle PBC}=\frac{\overline{CP}^2+\overline{CA}^2-\overline{PA}^2}{4\triangle PCA}$。
$\Rightarrow 4(\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA)\cot\alpha=a^2+b^2+c^2$。
$\Rightarrow \cot\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\triangle}=\cot A+\cot B+\cot C$。

(4) 承(3) $a^2+b^2+c^2=4\triangle\cot\alpha$，而 $\alpha\le\min\{\angle A,\angle B,\angle C\}\le\frac{\pi}{3}\Rightarrow\cot\alpha\ge\cot\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，故 $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}\triangle$。

評. (4) 這個方法用到 (3) 的假設，也就是布洛卡兒點的存在性，這件事留著自己做吧!

514. $\star$ 設 P 爲 $\triangle ABC$ 內部一點，且 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\theta$。求證 $\csc^2\theta=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$。 (99松山高中)

證. $\angle PBA+PAB=\angle PBA+\angle PBC=\angle B\Rightarrow\angle APB=\pi-\angle B$。
$\triangle PAB$ 中，由正弦定理得 $\frac{\overline{PB}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin\angle APB}=\frac{\overline{AB}}{\sin B}\Rightarrow\overline{PB}=\overline{AB}\frac{\sin\theta}{\sin B}$。
同理 $\overline{PC}=\overline{BC}\frac{\sin\theta}{\sin C}$, $\overline{PA}=\overline{CA}\frac{\sin\theta}{\sin A}$。
$\triangle PAB=\frac{1}{2}\overline{PA}\cdot\overline{AB}\sin\theta=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\sin A}=\triangle ABC\cdot\frac{\sin^2\theta}{\sin^2 A}$。
同理 $\triangle PBC=\triangle ABC\cdot\frac{\sin^2\theta}{\sin^2 B}$, $\triangle PCA\cdot\frac{\sin^2\theta}{\sin^2 C}$，三式相加得

$$\triangle ABC=\triangle ABC\sin^2\theta(\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C)$$

因此 $\csc^2\theta=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$。

11.2 複數極式

515. 設 z 爲複數，若 $\frac{z-3}{z}=2(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ)$，則複數 $\frac{z-1}{z}$ 之主輻角爲 ________。

答. 40°。 (100桃園高中)

解. 注意 $\frac{|z-3|}{|z|}=2=\frac{|(z-3)-(z-1)|}{|(z-1)-z|}\Rightarrow$ 分角線上 $\Rightarrow\arg(\frac{z-1}{z})=\frac{1}{2}\cdot 80^\circ=40^\circ$。

516. 設複數 z 滿足 $|z|=2$，若 $|z+\frac{2}{z}-1|=n$，且 n 爲整數，則 n 所有可能値的和爲 ________。 (100彰化藝術暨田中高中)

答. 10。

517. 若 $z\in\mathbb{C}$，$|z|=1$，則 $|z^2-z+2|$ 的最小値爲 ________。 (100南港高工)

答. $\frac{\sqrt{14}}{4}$。

解. 因爲 $|z|=1$，所以 $|z^2-z+2|=|z-1+2\bar{z}|$。令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，則 $|z-1+2\bar{z}|^2=(3\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta=8\cos^2\theta-6\cos\theta+2$。
所以當 $\cos\theta=\frac{3}{8}$ 時，$|z^2-z+2|$ 有最小值 $\frac{\sqrt{14}}{4}$。

518. 設 $z_1, z_2\in\mathbb{C}$，$|z_1|=|z_1+z_2|=3$, $|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，則 $\log_3|(z_1\bar{z}_2)^{2000}+(\bar{z}_1 z_2)^{2000}|=$ ________。 (100家齊女中)

答. 4000。

另解. $2z_1, z_1+z_2, 0$ 在複數平面上形成一個 $3, 3\sqrt{3}, 6$ 的直角三角形 $(1:\sqrt{3}:2)$。取斜邊中點 z_1 可得 0, z_1, z_1+z_2 爲正三角形。

519. 設 $\theta=\frac{\pi}{13}, n\in\mathbb{N}$ 滿足 $\left(\frac{1-\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n$ 爲實數的最小 $n=$ ________。

答. 26。 (100南湖高中代理)

520. $x^2+x+1=0$，求 $(x+\frac{1}{x})^2+(x^2+\frac{1}{x^2})^2+(x^3+\frac{1}{x^3})^2+\ldots+(x^{2010}+\frac{1}{x^{2010}})^2$。

答. 4020。 (99竹科實中)

11.3 正弦、中線定理

521. P 爲球面 S : $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=4$ 上的動點，$A(3,4,0)$、$B(3,3,2)$ 爲球面外兩點，求 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最大值。 (100中科實中)

答. $25+4\sqrt{29}$。

解. 令 $M(3,\frac{7}{2},1)$ 爲 $\overline{AB}$ 中點，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{MA}^2+\overline{PM}^2)$。其中 $\overline{MA}$ 爲定值。
因此只要求定點 M 到球面最遠的距離，$\overline{MO}+r=\frac{\sqrt{29}}{2}+2$，其中 O 爲球心，r 爲半徑。
$\overline{MA}=\frac{\sqrt{5}}{2}, \overline{PM}=\frac{\sqrt{29}}{2}+2$，代入得最大值 $25+4\sqrt{29}$。

另解. 先平移，使得球心爲新坐標之原點。令 P 坐標爲 (x,y,z)，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=-8x-6y-4z+25$。再柯西不等式處理之，類題見 100文華高中代理4。

522. 設 $A(-2,1,3)$, $B(0,3,-3)$，P 爲直線 L : $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$ 上一點，求 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 有最小值時，此時 P 點的坐標爲 ________。 (100南港高工)

答. $(-1,1,1)$。

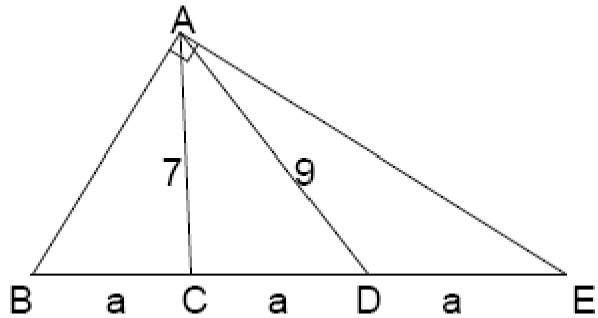
解. 令 $P(1+2t,2+t,2+t)$，代入所求式，配方得 $t=-1$, $P(-1,1,1)$ 時有最小值。

評. 本題亦可使用中線定理，則有達到最小值時，P 爲 $\overline{AB}$ 中點對 L 之投影。

523. 空間中有三個點 $A(-1,2,5)$，$B(-2,1,2)$，$P(0,b,c)$，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值爲 ________。 (100彰化藝術暨田中高中)

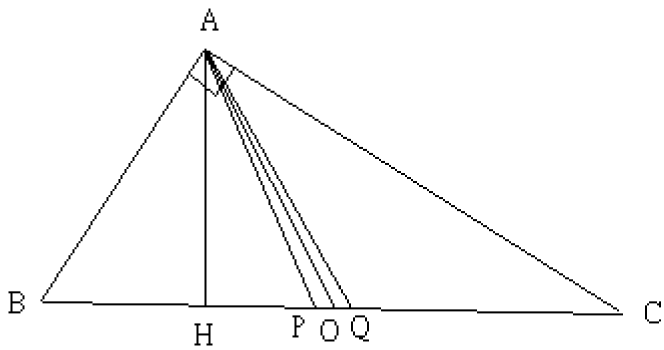
答. 10。

524. 如圖所示，$\triangle ABE$ 中，$\angle BAE = 90°$，C、D 爲邊 $\overline{BE}$ 上的三等分點，令 $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=a$, $\overline{AC}=7$, $\overline{AD}=9$，求 a。 (99育成高中)



答. $\sqrt{26}$。

525. 如右圖，已知一個直角三角形 $\triangle ABC$，$\overline{BC}$ 爲斜邊，斜邊長爲 a，斜邊上的高爲 h，O 爲斜邊上的中點，今將斜邊 n ($n>1$，n 爲奇數) 等分，若 P、Q 爲其中兩個等分點，且 $\overline{PQ}=\frac{a}{n}$，$O$ 點介於P、Q之間，設 $\angle PAQ=\alpha$，請問 $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan\alpha =$ ________。 (100桃園高中)



答. $\frac{4h}{a}$。

解. 由 A 對 $\overline{BC}$ 作垂足 H，以 tan 差角公式計算 $\tan\alpha$。

另解. 注意 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=1$。而由正弦定理有 $\sin\alpha=\frac{a}{2nR_n}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{2R_n}$。其中 R_n 爲 APQ 之外接圓半徑。

再由正弦定理可得 $R_n=\frac{\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{PQ}}{4\cdot\triangle APQ}\to\frac{\overline{AM}^2}{2h}=\frac{a^2}{8h}$，其中 M 爲 $\overline{BC}$ 中點。故所求 $=\frac{4h}{a}$。

526. $\triangle ABC$ 中，G 爲重心，若 $\overline{GA}=3$, $\overline{GB}=5$, $\overline{GC}=7$，則 $\cos\angle BGC=$ ________。

答. $-\frac{13}{14}$。 (97楊梅高中)

題題. 見 99華江高中5。

11.4 三角恆等式

527. (1) 已知 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}, \cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{4}$，求 $\tan(\alpha-\beta)$。

(2) 設 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}, \sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$，則 $\sin(\alpha+\beta)=$ ________。

(3) 設 z_1, z_2 爲複數，滿足 $|z_1|=|z_2|$，且 $z_1-z_2=1-2i$，求 $\frac{z_1\cdot z_2}{|z_1\cdot z_2|}$ 之值。

(4) 設 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha, \omega=\cos\beta+i\sin\beta$，且 $z+\omega=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 之值。 (99松山高中、100南港高工、99東山高中、98彰化女中)

答. (1) $-\frac{24}{7}$ (2) $\frac{12}{13}$ (3) $\frac{3}{5}+\frac{4}{3}i$ (4) $\frac{24}{7}$。

解(1) 和差化積，兩式相除得 $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{4}{3}\Rightarrow\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}=-\frac{24}{7}$。

528. (1) 已知 $\begin{cases}\sin A+\sin B &=\frac{1}{3}\\ \cos A+\cos B &=1\end{cases}$，求 $\cos(A-B)+\sin(A+B)=$ ________。

(2) $\begin{cases}\sin\theta+\cos\phi &=\frac{3}{5}\\ \cos\theta+\sin\phi &=\frac{4}{5}\end{cases}$，求 $\cos\theta\sin\phi$。

(3) $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\beta &=a\\ \cos\alpha+\sin\beta &=b\end{cases}$，求 $\sin(\alpha-\beta)$。(以 a, b 表示)

答. (1) $\frac{7}{45}$ (2) $-\frac{11}{100}$ (3) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$。 (99文華2招代理、99屏東女中、100中科實中)

529. $\triangle ABC$ 中，若 $4\sin A+3\cos B=6, 3\sin B+4\cos A=1$，則 $\angle C=$ ____。

答. $\frac{\pi}{6}$。 (98玉井工商)

530. $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$，若 $9a^2+9b^2-17c^2=0$，求 $\frac{\cot A+\cot B}{\cot C}$ 之值。

答. $\frac{9}{4}$。 (97台中一中)

解. 全換成 sin, cos，再利用正、餘弦定理 $\frac{\cot A+\cot B}{\cot C}=\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B\cos C}=\frac{c^2}{ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\frac{9}{4}$。

其中 $\cot A+\cot B=\frac{\cos A\sin B+\cos B\sin A}{\sin A\sin B}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}$。

531. $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分別爲頂點 A, B, C 的對邊，若 $\frac{\cot C}{\cot A+\cot B}=99$，求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$。

答. 199。 (100中壢高中2招)

532. 在 $\triangle ABC$ 中，a、b、c 分別爲 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長，且 $2\sin^2(\frac{A+B}{2})+\cos 2C=1$，$a^2=b^2+\frac{1}{2}c^2$，試求 $\sin(A-B)$ 的值爲 ________。 (100桃園高中)

答. $\frac{\sqrt{3}}{4}$。

533. 在 $\triangle ABC$ 中，設 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$，若已知 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$。試證：$a, b, c$ 成等差數列。 (100台南二中)

證. $\frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan(\frac{A}{2}+\frac{C}{2})=\cot(\frac{B}{2})\Rightarrow\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}$
$\Rightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{2}{3}=2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$。
同乘 $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$，得 $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{B}{2}$。
而 $\cot\frac{A}{2}=\frac{s-a}{r}$, $\cot\frac{B}{2}=\frac{s-b}{r}$, $\cot\frac{C}{2}=\frac{s-c}{r}$ 代入得證。

評. 證很漂亮，但很不直觀，其中玩了了一個 tan 的恆等式及 cot 的切線長代換。
而下方的另證，就是暴力證明。

另證. 令 $x=\tan\frac{A}{2}$, $y=\tan\frac{C}{2}$, 則 $\tan\frac{B}{2}=\tan(\frac{\pi}{2}-(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}))=\frac{1-xy}{x+y}=\frac{2}{3(x+y)}$。
$\sin A=\frac{2x}{1+x^2}$, $\sin B=\frac{12(x+y)}{9(x^2+y^2)+10}$, $\sin C=\frac{2y}{1+y^2}$。
$\frac{\sin A+\sin C}{2}=\frac{x+y+x^2y+xy^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\frac{\frac{4}{3}(x+y)}{1+x^2+y^2+\frac{1}{9}}=\frac{12(x+y)}{9(x^2+y^2)+10}=\sin B$,
因此 $\sin A, \sin B, \sin C$ 爲等差數列，再由正弦定理，得證。

534. (1) 計算 $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}$ 的值。 (100桃園現職聯招)

(2) 試求 $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$ 的值。 (100基隆女中代理中)

(3) 化簡 $\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$ 的值爲 ________。 (100全國聯招)

(4) 求 $\sum_{k=1}^{9}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{19}$。 (100師大附中)

答. (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{1}{2}$。

提示. (1) $x^7-1=0$ (3) $-\cos\frac{5\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$。

535. (1) Calculate $\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}=$ ________。 (98南科雙語)

(2) $S_n=\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\cos\frac{\pi}{2^k}\right)$，$S=\lim_{n\to\infty}S_n$，求 S 的範圍。 (100豐原高中)

(3) 設 $S_n=\sum_{k=2}^{n}\log_2(\cos\frac{\pi}{2^k})$，求證：$-1<S_n<0$。 (97潮州高中)

(4) 求 $\lim_{n\to\infty}\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2^2}\cos^2\frac{x}{2^3}\cdots\cos^2\frac{x}{2^n}$。 (98彰化女中)

答. (1) $\frac{1}{16}$ (2) $1-\log_2\pi$ (4) $x\neq 0$, $\frac{\sin^2 x}{x^2}$; $x=0$, 其值爲 1。

解(1) 將其乘上 $\frac{\sin\frac{\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}$，以兩倍角公式化簡可得 $\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}=\frac{1}{16}$。

536. 求值: $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=$ ________。 (99文華2招代理)

答. $-\frac{3}{8}$。

537. (1) 求 $\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}\sin\frac{9\pi}{7}$ 之值。

(2) 求 $\sin\frac{4\pi}{11}\sin\frac{8\pi}{11}\sin\frac{12\pi}{11}\sin\frac{16\pi}{11}\sin\frac{20\pi}{11}=$ ________。

(3) $\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 30^\circ\cos 40^\circ\cos 50^\circ\cos 60^\circ\cos 70^\circ\cos 80^\circ=$ ________。

答. (1) $-\frac{\sqrt{7}}{8}$ (2) $-\frac{\sqrt{11}}{32}$ (3) $\frac{3}{256}$。 (97台中一中、100苑裡高中、99文華高中)

解(1) 注意 $\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}\sin\frac{9\pi}{7}=-\sqrt{\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\cdots\sin\frac{6\pi}{7}}$。

令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，則 $\sum\limits_{n=0}^{6}x^n=\prod\limits_{n=1}^{6}(x-\omega^n)$。

兩邊代入 $x=1$，再取絕對值得 $7=2^6\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\cdots\sin\frac{6\pi}{7}$。

所以 $\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}\sin\frac{9\pi}{7}=\frac{-\sqrt{7}}{8}$。

538. (1) 求$\cos 190^\circ\cos 200^\circ\cos 210^\circ\cos 220^\circ\cos 230^\circ\cos 240^\circ\cos 250^\circ\cos 260^\circ$。

(2) $\tan\frac{\pi}{13}\tan\frac{2\pi}{13}\tan\frac{3\pi}{13}\tan\frac{4\pi}{13}\tan\frac{5\pi}{13}\tan\frac{6\pi}{13}$。

(3) $\sin 1^\circ\sin 3^\circ\sin 5^\circ\cdots\sin 87^\circ\sin 89^\circ$。

答. (1) $\frac{3}{256}$ (2) $\sqrt{13}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2^{45}}$。 (99竹科實中、99基隆高中、101武陵高中)

提示. (2) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ (3) $x^{90}=-1$。

539. ω 爲 $z^7=1$ 之虛根，試求 (99屏東女中)

(1) 以 $\omega+\omega^2+\omega^4,\omega^3+\omega^5+\omega^6$ 爲兩根之二次方程式。

(2) $\omega+\omega^2+\omega^4$ 之值。

答. (1) $x^2+x+2=0$ (2) $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$。

540. 化簡 $\frac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ$。 (100彰化女中)

答. 2。

541. 化簡 $\frac{\tan 20^\circ}{2\sec 20^\circ+1-4\cos 20^\circ}$。 (101台南二中)

答. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$。

解. 令 $\sin 20^\circ = x, \cos 20^\circ = y$, 則 $3-4x^2 = 4y^2-1, 3x-4x^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, 4y^3-3y = \frac{1}{2}$。
因此原式 $= \frac{x}{2+y-4y^2} \cdot \frac{3-4x^2}{4y^2-1}$，以三倍角化簡之得 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$。

類題. 這個做法一點也不直覺，是某天做完 100基隆女中5，突然想到的。

542. 求值: $\cos^2 10^\circ + \cos^2 50^\circ - \sin 40^\circ \sin 80^\circ =$ ________。 (101中科實中)

答. $\frac{3}{4}$。

543. 若 $(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \tan x^\circ$，求最小的正整數 x。 (99鳳新高中)

答. 9。

提示 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$。

544. (1) 求 $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$ 之值。 (99大安高工)

(2) 設 n 爲整數，且 $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$，求 n 之值。

答. (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) 47。 (99東山高中)

545. $\theta \neq 2n\pi$，試證 $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$。 (99左營高中)

546. 已知三次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 之三根爲 $\sin^2\frac{\pi}{12}, \sin^2\frac{3\pi}{12}$ 與 $\sin^2\frac{5\pi}{12}$ 則數對 $(p,q,r) =$ ________。 (98嘉義高中)

答. $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{32})$。

547. 已知 $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$，試證明：$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$。

證. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ 和 $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$ (97文華高中)
$\Rightarrow \cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 4(\cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma)$
再由 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$。
可得 $\cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma = 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \Rightarrow \cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$。

548. 計算 $\log_4(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)(1+\tan 45^\circ)$ 之值。 (97文華高中)

答. $\frac{23}{2}$。

解. 考慮 $x + y = \frac{\pi}{4}$，$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \Rightarrow (1+\tan x)(1+\tan y) = 2,$
所以所求爲 $\log_4 2^{23} = \frac{23}{2}$。

549. $x, y, z \in \mathbb{R}$，證明 $\frac{x-y}{1+xy} + \frac{y-z}{1+yz} + \frac{z-x}{1+zx} = \frac{x-y}{1+xy} \times \frac{y-z}{1+yz} \times \frac{z-x}{1+zx}$。 (97台南女中)

證. 將左式通分母

$$\begin{aligned}\frac{x-y}{1+xy}+\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+zx} &= \frac{x-y}{1+xy}-\frac{(x-y)(1+z^2)}{(1+yz)(1+zx)}\\ &= \frac{(x-y)\left((1+yz)(1+zx)-(1+xy)(1+z^2)\right)}{(1+xy)(1+yz)(1+zx)}\\ &= \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(1+xy)(1+yz)(1+zx)}.\end{aligned}$$

評. 乍看之下很複雜，但其實知右式有 $x-y$ 爲因式，因此另外兩項通分後必有 $x-y$ 之因式。

另證.提示. 若 $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow -\tan\gamma=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$。

11.5 其它

550. $\triangle ABC$ 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 之對應邊爲 a,b,c 且 a,b,c 三數成等差，$\angle B=30^\circ$，$\triangle ABC$ 面積爲 $\frac{3}{2}$，試求 b。 (100永春高中代理)

答. $1+\sqrt{3}$。

551. 設 $x\neq\pm1,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，解有理方程式 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{2x}{1-x^2}+\frac{3x-x^3}{1-3x^2}}{1-\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{3x-x^3}{1-3x^2}}$，得 x 的最大值爲 ________。

答. $\tan\frac{13\pi}{30}$。 (101中科實中)

提示. 若 $\tan\theta=x$，則 $\tan 5\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$。

552. 設 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，以 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 爲邊向外各作正三角形 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACG$，設 M 是 $\overline{BC}$ 的中點，若 $\overline{MF}=11,\overline{MG}=7$，則 $\overline{BC}$ 的值爲 ________。

答. 12。 (100師大附中)

553. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，且 $\triangle ABC$ 之面積爲 $\sqrt{3}$，令 $\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$，試求: $a+b+c$ 之最小值。 (99彰化女中)

答. 6。

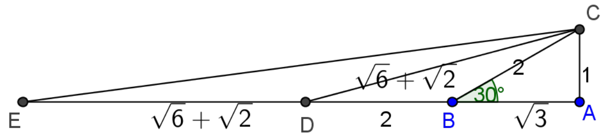
解. 由面積可得 $bc=4$，再由餘弦得 $a=\sqrt{b^2+c^2-4}=\sqrt{(b+c)^2-12}$。
令 $b+c=t\geq 4 \Rightarrow a+b+c=t+\sqrt{t^2-12}\nearrow$ in t $\Rightarrow$當 $t=4$，有最小值 6。

554. 設在單位圓 O 上有一定點 A，另有二動點 B,C，且 B,C 亦在圓 O 上，並各在 A 點的兩側移動，設 $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，則 $2\overline{AB}+3\overline{AC}$ 的最大值爲 ________。 (99彰化女中)

答. $2\sqrt{7}$。

555. 求 $\cot\frac{\pi}{24}$。(必須化爲最簡單的形式) (100華江高中2招)

答. $\sqrt{6}+\sqrt{2}+2+\sqrt{3}$。



解. 如右圖，可得

$\cot\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}+\sqrt{2}+2+\sqrt{3}$。

556. 三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，且 $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$，若對任意實數 x，恆有 $ax^2+bx+c\geq 0$，求 $\tan A$ 之最大值。 (100台南二中)

答. $2+\sqrt{3}$。

557. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 爲直角，$\overline{BC}$ 上有一點 D，使得 $\angle CAD=2\angle DAB$，若 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{4}{5}$，則 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=$ ________。 (100全國聯招)

答. $\frac{27}{25}$。

558. 設 $ABCD$ 是邊長爲 1 的正方形，P 點在 $\overline{BC}$ 上，Q 點在 $\overline{CD}$ 上，且 $\angle PAQ=45°$。試證 $\frac{\overline{AB}+\overline{BP}}{\overline{AD}+\overline{DQ}}=\frac{\overline{AP}^2}{\overline{AQ}^2}$。 (100松山工農)

證. 令 $\overline{BP}=a=\tan\angle PAB, \overline{DQ}=b=\tan\angle QAD$。

欲證之等式可改寫爲 $\frac{1+a}{1+b}=\frac{1+a^2}{1+b^2}\Leftrightarrow\frac{1+b^2}{1+b}=\frac{1+a^2}{1+a}\Leftrightarrow b-1+\frac{2}{b+1}=a-1+\frac{2}{a+1}$

$\Leftrightarrow b-a=2\frac{b-a}{(a+1)(b+1)}\Leftrightarrow(b-a)(1-\frac{2}{(a+1)(b+1)})=0$。

注意 $\angle PAB+\angle QAD=90°-45°=45°$。

由和角公式可得 $1=\frac{a+b}{1-ab}\Rightarrow(a+1)(b+1)=2$，故得證。

評. 逆著寫比較容易。

559. 已知直角三角形斜邊上的高 h 爲定數，設 s 爲此直角三角形周長的一半，求 s 的極小值，並求此時的股長及斜邊。 (100松山工農)

答. $s_{\min}=(\sqrt{2}+1)h$, 三邊：$\sqrt{2}h, \sqrt{2}h, 2h$。

560. 若圓內接四邊形 $ABCD$ 的四個邊長分別爲 a, b, c, d，設 $s=\frac{a+b+c+d}{2}$，試証明圓內接四邊形 $ABCD$ 的面積 $=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$。 (100松山工農)

561. $\triangle ABC$中，已知 $a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}$，試證明：$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$。 (100苑裡高中)

證. 同除 $2abc$，整理後，其等價於 $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$。
注意 $\cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 是凹函數，不失一般性 A,B 皆銳角。
則 $\cos A+\cos B\le 2\cos(\frac{A+B}{2})=2\sin\frac{C}{2}$。
$\cos A+\cos B+\cos C\le 2\sin\frac{C}{2}+(1-2\sin^2\frac{C}{2})=-2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}+1\le\frac{3}{2}$。
其等式其立條件爲 $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}, \angle A=\angle B=\frac{\pi-C}{2}$，即 $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$。

註. 這裡凹函數，是指函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內，滿足 $\frac{f(x)+f(y)}{2}\le f(\frac{x+y}{2}), \forall x,y\in[a,b]$。

562. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}\times\overline{AC}=15$，$\overline{DA}$ 的角平分線長爲 3，則 $\triangle ABC$ 的最大面積爲何？ (100麗山高中)

答. $3\sqrt{6}$。

563. 一圓半徑爲 2，過圓外一點 P 對圓作兩切線，切圓於 A、B 兩點，則 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值爲 ________。 (100陽明高中)

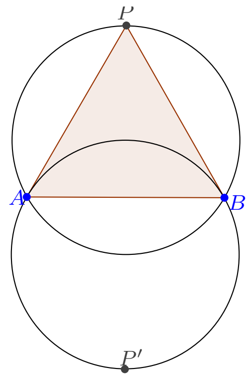
答. $8\sqrt{2}-12$。

564. $A(0,0,6), B(0,0,20)$ 爲空間中兩定點，$P(x,y,0)$ 爲一動點，若 $0\le x\le 15$，$0\le y\le 15$，$\angle APB\ge 30^\circ$。求 P 點之軌跡所成之面積。 (100基隆高中)

答. $13\pi+75\sqrt{3}$。

565. $\overline{AB}=4$，在含 $\overline{AB}$ 之平面滿足 $\angle APB\ge 60^\circ$ 之點所成區域面積爲 ________。

答. $\frac{64\pi}{9}+\frac{8\sqrt{3}}{3}$。 (100台中二中)



解. 如右圖 APB 爲正三角形。由圓周角性質，得 P 若在其外接圓移動時，角度不變。往圓內移動則角度$>60^\circ$。所以所求面積是兩圓盤區域圓積。外接圓半徑$=\frac{4}{\sqrt{3}}$。
而重疊面積 $=2\cdot(\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{16}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}\sin 120^\circ)=\frac{32\pi}{9}-\frac{8\sqrt{3}}{3}$。
所求 $=2\pi\cdot\frac{16}{3}-(\frac{32\pi}{9}-\frac{8\sqrt{3}}{3})=\frac{64\pi}{9}+\frac{8\sqrt{3}}{3}$。

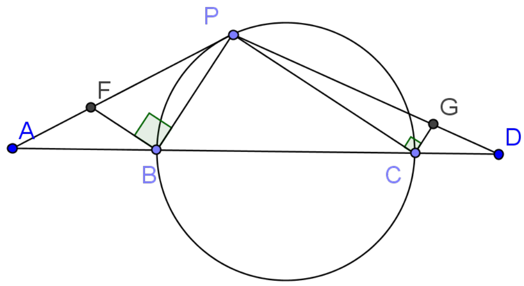
566. 設 $\overline{AB}$ 爲圓 C 之直徑，在圓 C 內部區域任取一點 P，則 $\angle APB>150$ 度之機率爲 ________。 (100松山家商)

答. $\frac{4}{3}-\frac{2}{\pi}\sqrt{3}$。

567. 設四點 $A-B-C-D$ 且 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=2:3:1$，以 $\overline{BC}$ 爲直徑作圓，取圓上一點 P (但 $P\ne B, P\ne C$)，則 $(\tan\angle APB)\times(\tan\angle CPD)=$ ____。 (99中正預校)

答. $\frac{1}{10}$。

解. 作圖如右，由相似形可得 $\frac{\overline{BF}}{\overline{PC}}=\frac{2}{5}$, $\frac{\overline{GC}}{\overline{PB}}=\frac{1}{4}$。
$\tan\angle APB\times\tan\angle CPD=\frac{\overline{BF}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{GC}}{\overline{PC}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$。



568. 設 A, B, C, D 四點在同一直線上，且 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=3:5:4$，若以 $\overline{BC}$ 爲直徑作圓，取圓上任一點 P (但 $P\neq B, P\neq C$)，令 $\angle APB=\alpha, \angle CPD=\beta$，求 $\tan\alpha\times\tan\beta$ 之值。 (100楊梅高中)

答. $\frac{1}{6}$。

另解. 不妨特殊化，把 P 放在 $\overline{BC}$ 中垂線上。

569. 已知 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心，$\overline{BC}=10$, $\overline{AG}=4$, $\angle BGC=135^\circ$，則 $\triangle ABC$ 的面積爲何？ (100鳳新高中代理、99中正預校)

答. $\frac{63}{2}$。

570. 小安最近趕流行到歷史博物館參觀田園之美畫展，其中有一幅巨大壁畫高 9 公尺，其下端離地面 4.5 公尺，小安眼睛距地面 1.5 公尺，則他應站在離牆 x 公尺處欣賞此畫作，可得最大視角 θ，求 x 值與 $\tan\theta$ 值的大小？請您爲附庸風雅的小安解出最佳觀賞位置吧！

答. $x=6, \tan\theta=\frac{3}{4}$。 (97大安高工)

571. 等腰 $\triangle ABC$中，$\overline{AB}=\overline{AC}$, D 在 $\overline{BC}$ 上、且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$；$E$ 在 $\overline{AD}$ 上、且 $\overline{AE}=20$、$\overline{ED}=2$，若 $\angle BED=3\angle BAD$，則 $\overline{AB}=$ ________。 (97中和高中)

答. $11\sqrt{5}$。

572. $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=2$, $\angle B+\angle C=60^\circ$，求 $\triangle ABC$ 面積的最大值。 (97陽明高中)

答. $\frac{1}{\sqrt{3}}$。

12 向量、斜坐標

12.1 外心、內心、垂心、重心

573. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=7, \overline{BC}=8, \overline{AC}=9$，過 $\triangle ABC$ 的內心作 $\overline{DE}$ 平行 $\overline{BC}$，分別交於 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 與 D, E，求 $\overline{DE}$。 (99彰化藝術)

答. $\frac{16}{3}$。

解. 內心公式 $\overrightarrow{OI}=\frac{8}{7+8+9}\overrightarrow{OA}+\frac{9}{7+8+9}\overrightarrow{OB}+\frac{7}{7+8+9}\overrightarrow{OC}$。
令 $O=A$，得 $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}(\frac{9}{16}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{16}\overrightarrow{AC})$。所以 $\overline{DE}=\frac{2}{3}\overline{BC}=\frac{16}{3}$。

574. 設 $\triangle ABC$ 的內心為 I，周長為 24，且 $5\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=0$，求 $\triangle ABC$ 的面積。

答. 24。 (99大安高工)

575. $\overline{AB}=2, \overline{BC}=3, \overline{CA}=4$, I 為內心，L 過 I 交 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 D, E，求 $\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}$ 之最小值 (兩者均為面積)。 (99高雄高中)

答. $\frac{32}{81}$。

解. 由內心公式可得 $\overrightarrow{AI}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$。令 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}=l\overrightarrow{AE}$。
則 $\overrightarrow{AI}=\frac{4k}{9}\overrightarrow{AD}+\frac{2l}{9}\overrightarrow{AE}$。又 D, I, E 共線 $\Rightarrow 4k+2l=9$。
再由算幾不等式得 $\frac{9}{2}\geq\sqrt{8kl}\Rightarrow\frac{1}{kl}\geq\frac{32}{81}$。面積比即為 $\frac{1}{kl}$，因此最小值為 $\frac{32}{81}$。

576. 設 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，通過 G 的一直線交 $\overline{AB}$ 於 D，交 $\overline{AC}$ 於 E，若 $\overline{AD}=\alpha\overline{AB}$, $\overline{AE}=\beta\overline{AC}$

(1) 試證: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 為一定值。

(2) 試求 $\frac{\triangle ADE面積}{\triangle ABC面積}$ 的最小值。 (97台南女中)

答. (1) 3 (2) $\frac{4}{9}$。

577. 令 $A(2,3)$, $B(0,0)$, $C(4,0)$，P 為圓 $x^2+y^2-10x-10y+46=0$ 上的點，若 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ 有最大值時，則 P 點座標為何？ (99大安高工2招)

答. $(\frac{31}{5},\frac{33}{5})$。

578. 已知 $A(2,0), B(-2,4), C(6,5), P(x,y)$ 且 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}|=6$。$k=2x-y+1$，求 (x,y) 使得 k 有最大值。 (97文華高中)

答. $(2+\frac{4}{\sqrt{5}},3-\frac{2}{\sqrt{5}})$。

579. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=6, \overline{BC}=5, \overline{CA}=7$, 設其外心爲 O，垂心爲 H，則 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ________。 (100文華高中代理)

答. 48。

解. 利用正射影，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=18$。$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{6^2+7^2-5^2}{2}=30$。因此所求爲 48。

580. 設 $A(1,1,0), B(2,1,-1), C(3,2,-2)$，則 $\triangle ABC$ 的垂心座標爲 ________。

答. $(3,-3,-2)$。 (100台中二中)

581. 設 $\triangle ABC$ 之三邊長分別爲 $\overline{AB}=4, \overline{BC}=6, \overline{CA}=5$，若 H 爲 $\triangle ABC$ 之垂心，過 H 點做一直線分別交 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 D, E 兩點，試求 $\triangle ADE$ 的最小面積。

答. $\frac{9\sqrt{7}}{49}$。 (102台中女中)

解. 設 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$。注意 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$，而由餘弦定理可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2}=\frac{5}{2}$。

故 x, y 滿足 $\begin{cases}16x+\frac{5}{2}y &=\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}x+25y &=\frac{5}{2}\end{cases}$，解得 $(x,y)=(\frac{1}{7},\frac{3}{35})$。

令 $\overline{AB}=\alpha\overline{AD}, \overline{AC}=\beta\overline{AE}$，則 $\overrightarrow{AH}=\frac{\alpha}{7}\overrightarrow{AD}+\frac{3\beta}{35}\overrightarrow{AE}$。由 D, H, E 三點共線得 $5\alpha+3\beta=35$。

再由算幾不等式可得 $\frac{35}{2}=\frac{5\alpha+3\beta}{2}\geq\sqrt{15\alpha\beta}\Rightarrow\alpha\beta\leq\frac{245}{12}$。

故此最小面積爲 $\frac{12}{245}\triangle ABC=\frac{12}{245}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{9}{7\sqrt{7}}$。

582. 空間中一圓過三點 $(1,-2,2), (1,4,0), (-4,1,1)$，求圓心座標。 (100中和高中)

答. $(-\frac{1}{2},1,1)$。

另解. 見 98嘉義高中11。

583. $\triangle ABC$ 與任一點 P，令 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$ 重心爲 G_1, G_2, G_3，試證 $\triangle G_1G_2G_3$ 面積爲 $\triangle ABC$ 的九分之一。 (99高雄高中)

584. H、G、O 分別爲三角形的垂心、重心、外心，試證：H、G、O 共線，且 $\overline{HG}:\overline{GO}=2:1$。 (99竹科實中、99中崙高中)

證. 令三角形的三頂點爲 A, B, C，H、G、O 分別對 $\overline{AB}$ 的投影點爲 H_c, G_c, O_c，則有 $\overrightarrow{AO_c}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG_c}=\frac{0+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH_c}}{3}=\frac{2\overrightarrow{AO_c}+\overrightarrow{AH_c}}{3}$，即 $\overrightarrow{AG_c}=\frac{2\overrightarrow{AO_c}+\overrightarrow{AH_c}}{3}\Rightarrow\overrightarrow{H_cG}=2\overrightarrow{GO_c}\Rightarrow\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{GO}\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow(\overrightarrow{HG}-2\overrightarrow{GO})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，同理 $(\overrightarrow{HG}-2\overrightarrow{GO})\cdot\overrightarrow{AC}=0$，又 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 線性獨立，故 $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}\Rightarrow\overline{HG}:\overline{GO}=2:1$。

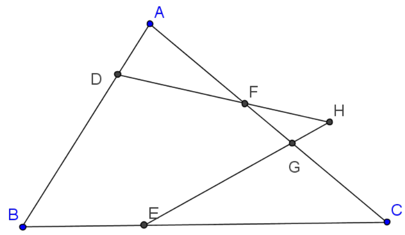
12.2 斜坐標、共線性質

585. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，D, E, F 分別爲三邊之三等分點，若 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 兩兩分別交於 P, Q, R，試求 $\triangle PQR$ 和 $\triangle ABC$ 的面積比。(97大安高工)

答. $\frac{1}{7}$。

解. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{7}{6}(\frac{3}{7}\overrightarrow{AF} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC})$，又 Q, F, C 三點共線，所以 $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AF} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$。
同理 $\overrightarrow{BP} = \frac{6}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BF}$。綜合二式得 $\overline{FP} : \overline{FQ} : \overline{QC} = 1 : 3 : 3$，其餘線段分割比例亦同。由面積公式 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ 可得面積 $\triangle BPC = \triangle CQA = \triangle ARB = 2\triangle PQR$，因此面積比爲 $\frac{1}{7}$。

586. 如下圖(圖形中各線段之比例僅供參考，實際之比例敘述如後)，設 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{1}{3}$ 且 $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{1}{2}$ 且 $\frac{\overline{AF}}{2} = \frac{\overline{FG}}{1} = \frac{\overline{GC}}{2}$，若 $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BC}$，則實數對 $(\alpha, \beta) =$ ________。



答. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$。

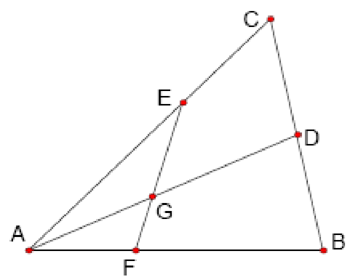
解. 斜坐標：取 B 爲原點，$A(20,0)$, $C(0,15)$，由分點公式有 $D(15,0)$, $E(0,5)$, $F(12,6)$, $G(8,9)$，因此 $\overleftrightarrow{DF} : 2x + y = 30$, $\overleftrightarrow{EG} : x - 2y = -10$。
聯立可解得 $\Rightarrow H(10,10) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{2}{3}$。

評. 斜坐標在不牽扯角度時，相當好用。(100中科實中)

587. 已知 $ABCD$ 爲平行四邊形，設 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 P，E 爲 $\overline{DP}$ 的中點，直線 AE 交 $\overline{CD}$ 於 F，若向量 $\overrightarrow{AC} = \vec{r}, \overrightarrow{BD} = \vec{s}$，則向量 $\overrightarrow{AF} =$ ________。（以向量 $\vec{r}, \vec{s}$ 表示）

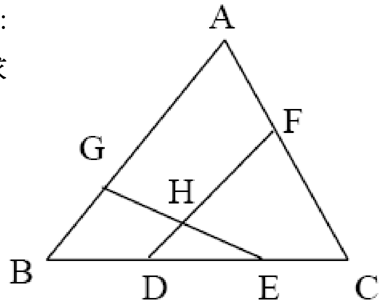
答. $\frac{2}{3}\vec{r} + \frac{1}{3}\vec{s}$。(100師大附中)

588. 如圖，$\triangle ABC$ 中，D 爲 $\overline{BC}$ 之中點，$\overline{AB} = 12, \overline{AC} = 16$, E 在 $\overline{AC}$ 上，F 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AE} = 2\overline{AF}$，則 $\overline{EG} : \overline{FG} =$ ________。(100麗山高中)



答. $3 : 2$。

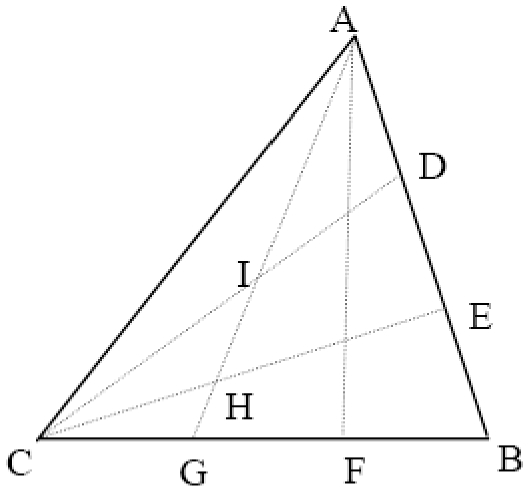
589. 如右圖之中，點 G 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AG}:\overline{GB}=2:1$，點 F 在 $\overline{AC}$ 上，$\overline{AF}:\overline{FC}=1:2$，點 D、點 E 在 $\overline{BC}$ 上，$\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}=1:1:1$，又 $\overline{GE}$ 與 $\overline{DF}$ 交於 H 點，求 $\overline{DH}:\overline{HF}=$ ________。 (99台中一中)



答. $1:3$。

提示. 斜坐標。

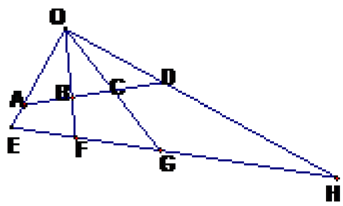
590. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5, \overline{BC}=6, \overline{AC}=7, \overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}, \overline{BF}=\overline{FG}=\overline{GC}$，如右圖，則 $\triangle CHI$ 的面積為 ________。 (98師大附中)



答. $\frac{18}{35}\sqrt{6}$。

解. $\triangle ABG$ 和直線 CD 中，由孟氏定理有
$\frac{\overline{AI}}{\overline{IG}}\cdot\frac{\overline{GC}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}}=1\Rightarrow\frac{\overline{AI}}{\overline{IG}}=\frac{3}{2}$。
$\triangle ABG$ 和直線 CE 中，由孟氏定理有
$\frac{\overline{AH}}{\overline{HG}}\cdot\frac{\overline{GC}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{EA}}=1\Rightarrow\frac{\overline{AH}}{\overline{HG}}=6$。
令 $\frac{\overline{IH}}{\overline{IG}}=x$, 則 $6=\frac{\overline{AH}}{\overline{HG}}=\frac{\overline{AI}+\overline{IH}}{\overline{IG}-\overline{IH}}=\frac{\frac{3}{2}+x}{1-x}$
$\Rightarrow x=\frac{9}{14}$。而 $\frac{\overline{IH}}{\overline{AG}}=\frac{2x}{5}=\frac{9}{35}$，
故 $\triangle CIH$ 面積$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{35}\triangle ABC$ 面積。
而 $\triangle ABC$ 面積以海龍公式得
$\sqrt{9\cdot4\cdot3\cdot2}=6\sqrt{6}$。因此 $\triangle CIH$ 面積$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{35}6\sqrt{6}=\frac{18}{35}\sqrt{6}$。

591. 如圖 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=1, \overline{EF}=2, \overline{FG}=3$，則 $\overline{GH}=$ ________。 (97師大附中)



答. $\overline{GH}=5$。

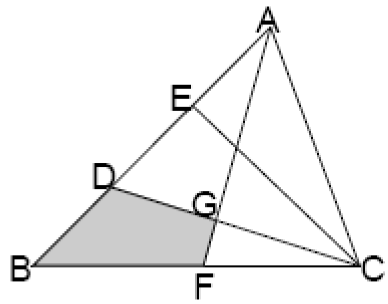
解. 利用線性變換保平行線段長之比例。
令 $O(0,0)\ A(0,1), D(1,0), E(0,b), H(a,0)$。可得直線方程式，$\overleftrightarrow{OB}: y=2x, \overleftrightarrow{OC}: x=2y$,

$\overleftrightarrow{EH}: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$。解聯立方程得 $F(\frac{ab}{2a+b},\frac{2ab}{2a+b}), G(\frac{2ab}{a+2b},\frac{ab}{a+2b})$。
又 $\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}=\frac{2}{3}\Rightarrow a=2b$。再計算得 $\overline{GH}=\frac{5}{2}\overline{EF}$。還原比例得 $\overline{GH}=5$。

592. 如右圖，三角形 ABC 中，D、E 為 $\overline{AB}$ 的三等分點，F 平分 $\overline{BC}$，$\overline{AF}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 G 點，求四邊形 $BDGF$ 的面積是三角形 ABC 面積的幾分之幾。 (98新港藝術)

答. $\frac{7}{30}$。

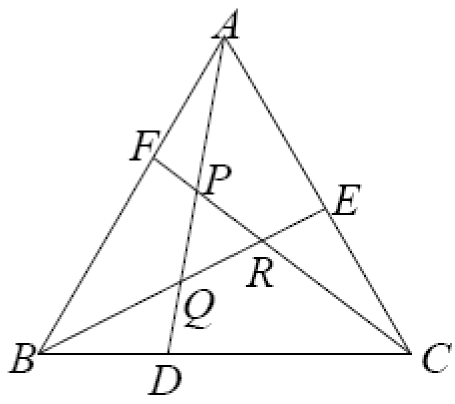
解. 在 $\triangle BCD$ 和直線 AF 中，由孟氏定理可得
$\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BA}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{DG}}{\overline{GC}}=1\Rightarrow\frac{\overline{DG}}{\overline{GC}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\triangle CGF=$
$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\triangle CBD=\frac{3}{10}\triangle CBD=\frac{7}{30}\triangle ABC$。



593. 如下圖，正三角形 $\triangle ABC$，若 D, E, F 將三邊分成 $\overline{AF}:\overline{FB}=\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{CE}:\overline{EA}=2:(n-2)$；(其中 $n>4$)，且 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 相交所成的 $\triangle PQR$ 的面積是 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{1}{7}$，則 n 值為 ________。 (99彰化女中)

答. 6。

解. 由對稱性可知
$\triangle ABQ=\triangle BCR=\triangle CAP=\frac{2}{7}\triangle ABC$。
令 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:t$, 由二次共線可得
$\overrightarrow{CQ}=\frac{t^2}{t^2+t+1}\overrightarrow{CB}+\frac{t+1}{t^2+t+1}\overrightarrow{CE}$。
因此有 $\triangle ABQ=\frac{t+1}{t^2+t+1}\triangle ABE=\frac{t}{t^2+t+1}\triangle ABC$
$\Rightarrow\frac{t}{t^2+t+1}=\frac{2}{7}\Rightarrow t=2$ or $-\frac{1}{2}$。所以 $n=6$。



12.3 其它

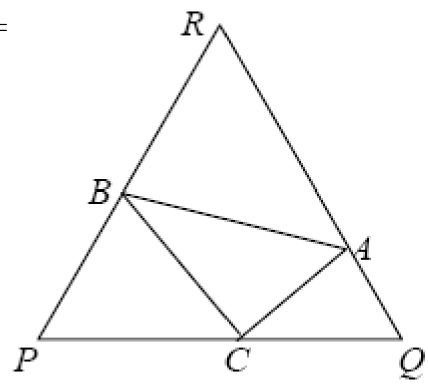
594. $\triangle ABC$ 內有一點 P，滿足 $3\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，且 $\overleftrightarrow{AP}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，若 $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$，$a,b\in\mathbb{R}$，則數對 $(a,b)=$ ________。 (99文華2招代理)

答. $(\frac{5}{9},\frac{4}{9})$。

595. 如右圖，$\triangle PQR$ 為正三角形，$\triangle ABC$ 為直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，已知 $\overline{PC}=15$，$\overline{PB}=\overline{CQ}=10$，求 $\overline{AQ}$ 之長度。 (100新竹高工)

答. 8。

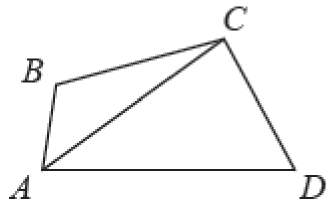
解. 令 $a=\overline{AQ}, \vec{u}=\frac{\overrightarrow{QA}}{a}, \vec{v}=\frac{\overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{QP}|}$。
則 $\overrightarrow{AC}=-a\vec{u}+10\vec{v}, \overrightarrow{CB}=10\vec{u}+5\vec{v}$。
由 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}$ 且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ 得 $a=8$。



596. 邊長為 1 的正四面體 $OABC$，若 $D\in\overline{OA}$ 且 $\overline{OD}:\overline{DA}=2:1$，且 E 為 $\overline{BC}$ 中點，若 $F\in\overline{DE}$ 且 $\overline{OF}\perp\overline{DE}$，$\frac{|\overrightarrow{DF}|}{|\overrightarrow{FE}|}=$ ________。 (100中正高中)

答. $\frac{4}{15}$。

597. 如圖，平面上四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=10$, $\overline{AD}=13$, $\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$，向量內積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=120$，設向量 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則 $(x,y)=$ ________。 (100桃園現職聯招)



答. $(\frac{50}{63},\frac{40}{63})$。

598. 四邊形 $ABCD$，點 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:2$，點 Q 在 $\overline{CD}$ 上且 $\overline{CQ}:\overline{QD}=2:3$，得 $\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{BC}$，則序對 $(x,y)=$ ________。 (100基隆女中代理)

答. $(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$。

評. 題目有瑕疵，所以也來個不嚴謹的方法還它，把 A, D 黏在一起得 $y=\frac{3}{5}$，同理得 $x=\frac{2}{5}$。

599. 有一個正四面體的四個頂點爲 A,B,P,Q，線段 $\overline{AP}$ 上有一點 M，線段 $\overline{BQ}$ 上有一點 N，且 $\frac{\overline{AM}}{\overline{MP}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{NQ}}=\frac{3}{2}$，已知向量 $\overrightarrow{MN}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{PQ}$，試求數對 (r,s)。

答. $(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$。 (99高雄市聯招)

另解. 偷偷把 A,B 黏起來得 $s=\frac{3}{5}$；偷偷把 P,Q 黏起來得 $r=\frac{2}{5}$。

600. 四面體 $OABC$ 中，D 點在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AD}:\overline{DB}=1:2$；$E$ 點在 $\overline{CD}$ 上，$\overline{DE}:\overline{EC}=5:3$；$F$ 點在 $\overline{OE}$ 上，$\overline{OF}:\overline{FE}=1:3$；設向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$；$\overrightarrow{AF}$ 交平面 OBC 於 G 點，則 $\overline{AG}:\overline{FG}=$ ________。 (97高雄市聯招)

答. $16:1$。

601. $\triangle ABC$ 中，$A(1,1)$, $B(5,4)$, $C(11,1)$, 若 $\overrightarrow{AT}=m\overrightarrow{AB}+(1-m)\overrightarrow{AC}$ 且 $m|\overrightarrow{AB}|=(1-m)|\overrightarrow{AC}|$，則 $|m\overrightarrow{AB}+(1-m)\overrightarrow{AC}|$。 (100永春高中代理)

答. $2\sqrt{10}$。

解. 注意 T 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overrightarrow{AT}$ 爲 $\angle A$ 之角平分線。
而 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=10\Rightarrow\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。可算得 $|\overrightarrow{AT}|=2\sqrt{10}$。

602. 設 $\triangle ABC$ 中，D 在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AD}$ 爲 $\angle A$ 之內角平分線，若 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$，將射線 $\overrightarrow{AD}$ 延長至 P 點，使得 $\triangle ABP$ 面積 $=\frac{9}{2}\triangle ABC$ 面積，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$ ________。 (97台中女中)

答. $(\frac{27}{8},\frac{9}{2})$。

603. 設 $OABC$ 爲四面體，G 爲 $\triangle ABC$ 之重心，M 爲 $\overline{OA}$ 中點，$\overline{OG}$ 交平面 MBC 於 H， (99東山高中)

(1) 試證：若 $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，則 $x+y+z=1$。

(2) 若 $\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$，求有序數組 (α,β,γ)。

答. (2) $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$。

604. 平面上 $\triangle ABC$，已知 D,E 分別在 $\overline{AB},\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=4:3,\overline{BE}:\overline{EC}=1:2$，設 $\overline{AE}$ 和 $\overline{CD}$ 交於點 O，若點 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則 $\overline{AB}^2:\overline{BC}^2:\overline{CA}^2=$ ________。

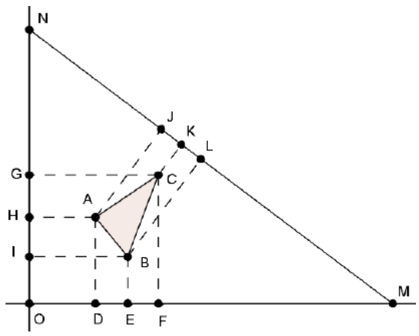
答. $10:9:4$。 (97陽明高中)

解. 由孟氏定理可得 $\overline{EO}:\overline{OA}=1:2\Rightarrow\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{BC}$。

由 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$ 和 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overline{BC}^2$ 可得聯立方程式 $\begin{cases}\frac{c^2}{2}&=\frac{c^2}{3}+\frac{2}{9}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\\\frac{a^2}{2}&=\frac{1}{3}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2}+\frac{2}{9}a^2\end{cases}$，

其中 a,b,c 表示三邊長，整理解得 $a^2:b^2:c^2=9:4:10$。

605. $\star$ 如下圖，已知 $O(0,0),M(4,0),N(0,3)$，在 $\triangle OMN$ 內部有 $\triangle ABC$，$A,\ B,\ C$ 三點在 x 軸上的投影點分別爲 D,E,F，在 y 軸上的投影點分別爲 H,I,G，在 $\overline{MN}$ 上的投影點分別爲 J,L,K，且已知 $\overline{DE}=\overline{EF},\overline{GH}=\overline{HI},\overline{JK}=\overline{KL}$，試求 $\cos\angle BAC$。 (99台中二中)



答. $\frac{\sqrt{13}}{65}$。

解. 令 $\overline{DE}=u,\overline{GH}=v$，則 $\overrightarrow{AB}=(u,-v)$，
$\overrightarrow{AC}=(2u,v)$，而 $\overrightarrow{NM}=(4,-3)$。
由 $\overline{JK}=\overline{KL}\Rightarrow\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{AC}$
$\Rightarrow 4u+3v=16u-6v\Rightarrow v=\frac{4}{3}u$。
$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{2-\frac{16}{9}}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}\sqrt{4+\frac{16}{9}}}=\frac{\sqrt{13}}{65}$。

13 幾何

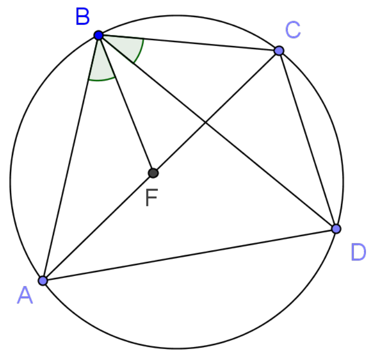
13.1 平面幾何

圓—托勒密幾何定理

606. 設四邊形 $ABCD$ 是圓的內接四邊形，試證：$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{BC} \times \overline{AD} + \overline{AB} \times \overline{CD}$。

(97中和高中)

證. 不失一般性假設 $\angle ABD \geq \angle DBC$。在 $\overline{AC}$上取 F 使得 $\angle ABF = \angle DBC$，
則有 $\triangle ABF \sim \triangle DBC$ 和 $\triangle FBC \sim \triangle ABD$。
由相似形邊長成比例得
$\overline{AF} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$ 和 $\overline{FC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}$，
兩式相得即得證。



607. 若 $ABCDEFG$ 爲圓內接正七邊形，半徑爲 $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{7}}$，求 $\overline{AC}^2 - \overline{BC} \times \overline{AD}$。

答. 16。 (100南科實中)

解. 由托勒密定理得，所求 $= \overline{AB}^2 = \left[\frac{2}{\sin\frac{\pi}{7}} \cdot (2\sin\frac{\pi}{2})\right]^2 = 16$。

608. 設 $ABCDEFGHI$ 爲一正九邊形，邊長爲 10，則 $\overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AD} =$ ________。

答. 100。 (100中正高中2招)

609. 若有一正 k 邊形其頂點依序爲 $A, B, C, D \ldots$ 滿足 $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$，則 $k =$ ________。

答. 7。 (99嘉義高工)

提示. $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{AC}$。

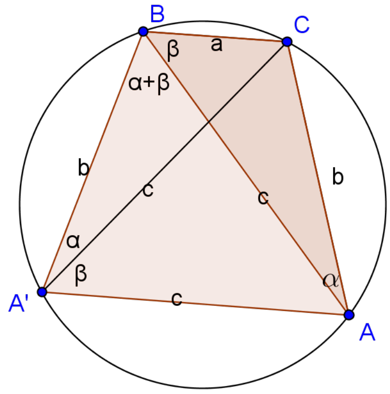
610. 設方程式 $(x\sin\frac{\pi}{7})^7 - 128 = 0$ 的七個根在複數平面上由正實數軸往逆時針方向分別爲 $w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ ，試求：
$(|w_1 - w_3||w_2 - w_4| + |w_3 - w_5||w_4 - w_6|) - (|w_1 - w_4||w_2 - w_3| + |w_3 - w_6|w_4 - w_5|)$。

答. 32。 (100中壢高中)

611. $\triangle ABC$ 中，若 $(\overline{AB} + \overline{AC})(\overline{AB} - \overline{AC}) = \overline{AB} \times \overline{BC}$，$\angle BAC = 63°$，求 $\angle ABC$。

答. 18°。 (100南科實中)

解. 令角 A, B, C 之對邊爲 a, b, c，整理等式得 $c^2 = ca + b^2$。
將 $\triangle ABC$ 以 $\overline{BC}$ 之中垂線反轉得 $\triangle A'CB$，四邊形 $AA'BC$ 爲等腰梯形。
由托勒密定理得 $\overline{AA'} = c$。
令 $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$，
則 $2\alpha + 3\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = \frac{180^\circ - 2\alpha}{3} = 18^\circ$。



另解. $\angle A = 2\angle B \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$，見99中正高中13。

612. $\triangle ABC$ 中，已知 $(\overline{AC}+\overline{AB})\cdot(\overline{AC}-\overline{AB}) = \overline{AB}\cdot\overline{BC}$ 且 $\angle BAC = 75^\circ$，求 $\angle ABC$。

答. 70°。 (97台中一中)

613. 已知 $\triangle ABC$ 中最大角 $\angle A$ 是最小角 $\angle B$ 的 2 倍，且三邊長爲連續的自然數，求 $\triangle ABC$ 的三邊長。 (100卓蘭實中、98嘉義高中)

答. $4, 5, 6$。

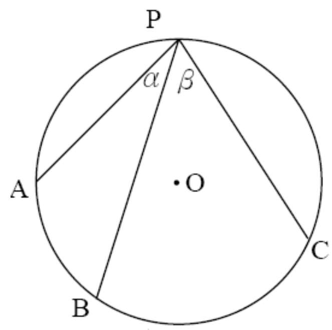
另解. $\angle A = 2\angle B \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$，見99中正高中13。

614. 今有一三角形，其三邊長爲連續整數且有一角另之兩倍。求此三角三邊長。

答. $4, 5, 6$。 (100嘉義縣聯招)

解. 分三種可能，但只有上題之情況合。

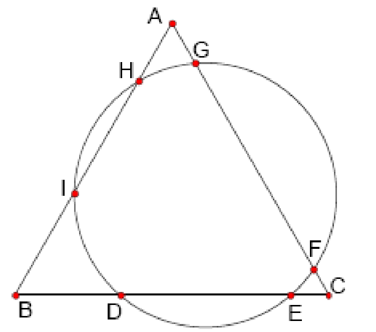
615. 如圖，已知 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ 是圓 O 的三條弦，$\angle APB = \alpha$, $\angle BPC = \beta$，試證：$\overline{PB}\sin(\alpha+\beta) = \overline{PC}\sin\alpha + \overline{PA}\sin\beta$。 (99台中一中)



提示. 乘 $2R$、正弦定理、托勒密定理。

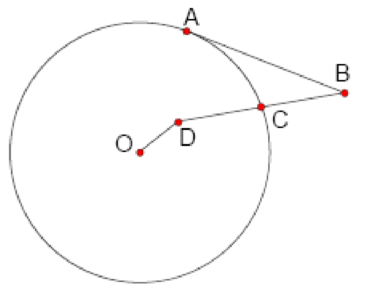
圓—圓冪性質

616. 如圖，一圓交一正三角形 ABC 於 D、E、F、G、H、I 六點，若 $\overline{CF}=1$, $\overline{FG}=13$, $\overline{AG}=2$, $\overline{HI}=7$，則 $\overline{DE}=$ ________。 (100麗山高中)



答. $2\sqrt{22}$。

617. 如圖，$\overline{AB}$ 與圓 O 相切於 A，$\overline{AB}=6$，D 爲圓內一點，$\overline{BD}$ 交圓 O 於 C，且 $\overline{BC}=\overline{CD}=3$，$\overline{OD}=2$，則圓 O 的半徑爲 = ________。 (100麗山高中)



答. $\sqrt{22}$。

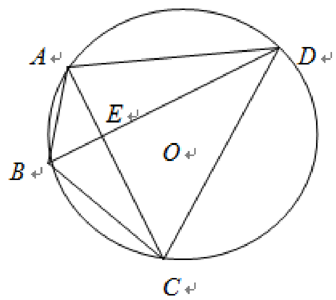
618. 四邊形 $ABCD$ 爲圓內接四邊形，$\overline{AC}$ 爲直徑且 $\overline{AC}=2$，又 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 E 點，則 $\overline{BD}$ 長度爲 ________。 (100彰化女中、100鳳山高中)

答. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$。

圓

619. 以銳角 $\triangle ABC$ 的邊 $\overline{BC}$ 爲直徑作一圓，分別交另兩邊 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 於 D, E 兩點，求證：$\overline{DE}=\overline{BC}\cdot\cos A$。 (100成淵高中)

620. ⋆ 設 A, B, C, D 四點共圓，其中 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直於點 E，圓心 O 在 $\triangle CDE$ 的內部，如圖所示。試找出圓內所有的點 P 使得 $\triangle PAB$ 與 $\triangle PCD$ 的面積相等；並請從教學觀點說明你(妳)的解題思路。 (99桃園縣高中現職聯招)



答. $\overleftrightarrow{OF}$ 與 $\overleftrightarrow{O'F}$ 與圓所截之線段，記號見於下。

解. 設 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 不平行。

由 $90^\circ=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})\Rightarrow\angle AOB+\angle COD=180^\circ$，

$\Rightarrow\triangle AOB=\triangle COD$。

令 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 的交點爲 F。

由相似形可得 P 在 $\overleftrightarrow{OF}$ 時 P 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 的距離比值爲常數。因此 P 在 $\overleftrightarrow{OF}$ 時 $\triangle APB = \triangle CPD$。
由 O 點作直線 L 平行 $\overline{AB}$。取 O' 點使得 $\overline{OO'}$ 的中點恰爲 L 和 $\overleftrightarrow{BD}$ 的交點。
則 $\triangle AO'B = \triangle AOB = \triangle COD = \triangle CO'D \Rightarrow \triangle AO'B = \triangle CO'B$。同 $\overleftrightarrow{OF}$ 的理由，可得 $\overleftrightarrow{O'F}$上，兩三角形面積亦相等。
若 $\overline{AB}//\overline{CD}$ 則取 $\overleftrightarrow{OF}//\overline{AB}$。

評. 以代數解之，則如角平分線之求法：$d_{AB}\cdot\overline{AB} = d_{CD}\cdot\overline{CD} \Rightarrow (ax+bx+c) \pm t(ex+fy+g) = 0$ 。

621. 設 a, b, c, d 都是正數，且滿足$a \geq b$, $a \geq c$, $a \geq d$ 。試找出 a, b, c, d 可以作爲某圓內接四邊形的四邊長度之充要條件，並證明你(妳)的答案。 (100華江高中)

答. $b+c+d > a$。

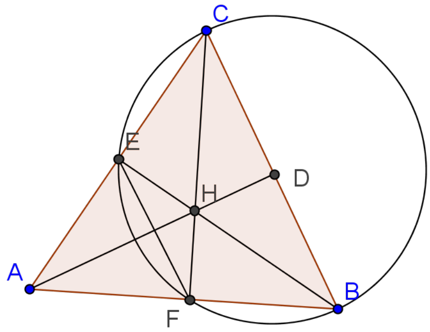
證. 若 a, b, c, d 可爲圓內四邊形之四邊長，由三角不等式可 $b+c+d > a$。
若 $b+c+d > a$，考慮 α 滿足 $a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$。
檢驗 α 的存在性 $|\cos\alpha| < 1 \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2-d^2 < 2(ab+cd)$ 且 $a^2+b^2-c^2-d^2 > -2(ab+cd)$。
移項配方可得 $(a-b)^2-(c+d)^2 < 0$ 且 $(a+b)^2-(c-d)^2 > 0$。
$\Leftrightarrow (a-b-c-d)(a-b+c+d) < 0$ 且 $(a+b+c-d)(a+b-c+d) > 0$。
由 a 最大邊且 $b+c+d > a$，可得以上兩不等式成立，因此可取 $\alpha = \arccos\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$。
以 α 爲 a, b 夾角做一三角形，再以其第三邊 e 和 c, d 三邊做另一三角形，且兩三角形在 e 的異側。
由 α 之選取可 c, d 夾角洽爲 $\pi-\alpha$。對角互補 $\Rightarrow$ 此兩三角形所拼之四邊形 a, b, c, d 爲一圓內接四邊形。

622. 四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=14$, $\overline{BC}=9$, $\overline{CD}=7$, $\overline{DA}=12$，求四邊形 $ABCD$ 的所有內切圓中，面積最大者爲 ________。 (101文華高中)

答. 24π。

623. $\star$ 銳角 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 爲三邊上的高，試證：$\triangle ABC$ 的垂心爲 $\triangle DEF$ 的內心。 (97松山家商)

證. 如右圖 $\angle EBC = \frac{\pi}{2} - \angle BCE$。又 $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ \Rightarrow BCEF$ 四點共圓 $\Rightarrow \angle EFC = \angle EBC = \frac{\pi}{2} - \angle BCA$。同理 $\angle DFC = \frac{\pi}{2} - \angle BCA \Rightarrow \angle EFC = \angle DFC \Rightarrow \overleftrightarrow{CF}$ 為 $\angle DFE$ 之角平分線，同理得 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BF}$ 亦為角平分線，故 H 為 $\triangle DEF$ 之內心。



624. 在邊長為 a 的正方形中，剪下一個扇形和一個圓(如圖)分別作圓錐的側面和底，則圍成的圓錐體的體積？ (97楊梅高中)

答. $\frac{\sqrt{15}(5\sqrt{2}-2)^3}{3\cdot 23^3}\pi a^3$。

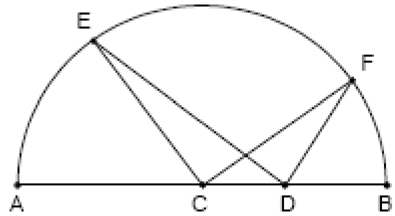
625. $\star$ 如圖，若 $\overline{AB}$ 為直徑，C 為圓心，E、F 為圓上兩相異點，D 在 $\overline{BC}$ 上且 $\angle CED = \angle CFD = 10^\circ$, $\angle ACE = 40^\circ$，求 $\angle BCF$。(圖形角度僅供參考，未準確) (97台中一中)

答. 20°。

解. 令 $\angle BCG = x^\circ$，並延伸半圓及線段 $\overline{AF}$，則有 $\angle CFE = \left(\frac{40+x}{2}\right)^\circ$。

注意 E, C, D, F 四點共圓，故有 $\angle CDE = \angle CFE$。

又 $\angle ACE = \angle CED + \angle CDE \Rightarrow 40 = 10 + \frac{40+x}{2} \Rightarrow x = 20^\circ$。

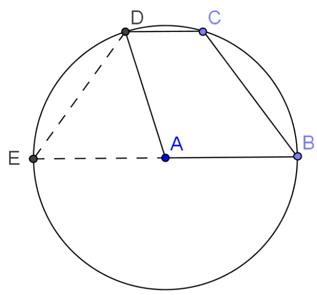


626. 正 n 多邊形上取連續的四個頂點 A, B, C, D，若 $\triangle ACD$ 面積為 $\triangle ABC$ 面積的兩倍，求 n。 (99育成高中)

答. $n = 6$。

627. 如圖：圓心為 A, 半徑為 6 的圓，取 B, C, D 三點使四邊形 $ABCD$ 為梯形，且 $\overline{DC} // \overline{AB}$，已知對角線 $\overline{BD} = 11$，則 $\overline{DC} =$ ________。 (100卓蘭實中)

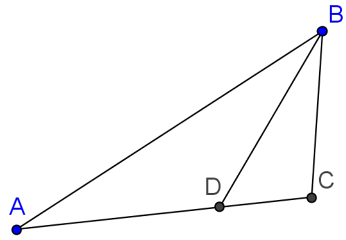
答. $\frac{49}{6}$。



其它

628. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊分別為 a, b, c。若 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的大小成等比數列，且 $b^2 - a^2 = ac$，則 $\angle B$ 的弧度為 ________。 (99中正高中)

答. $\frac{2\pi}{7}$。

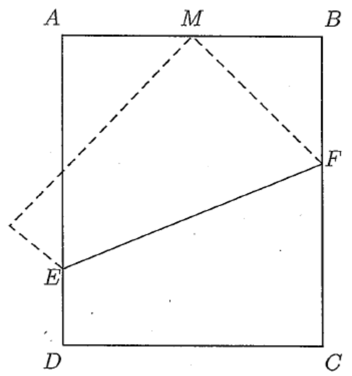


解. 作 $\angle B$ 之角平分線交 $\overline{AC}$ 於 D，則 $\overline{CA}\cdot\overline{CD} = b\cdot b\cdot\frac{a}{a+c} = a^2 = \overline{CB}\cdot\overline{CB}$，其中 $b^2 = a(a+c)$。因此 $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}$ $\Rightarrow \triangle CAB \sim \triangle CBD \Rightarrow \angle B = 2\angle A$，故公比爲 $2 \Rightarrow \angle B = \frac{2\pi}{7}$。

另解. 圓內接四邊形中的托勒密定理：$b^2 = a^2 + ac$ 。

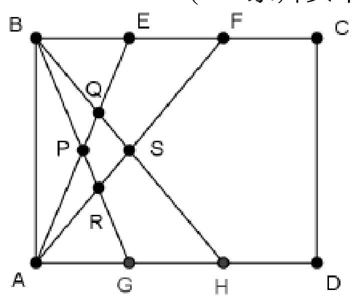
類題. 這個性質，小有用處，見 98嘉義高中計算1、100南科實中2。

629. 將長 $\overline{AB} = 240$, 寬 $\overline{BC} = 288$ 的長方形紙張對摺，讓頂點 C 剛好落在線段 $\overline{AB}$ 的中點 M 上，如下圖所示：已知 $\overline{EF}$ 是摺線，求摺線 $\overline{EF}$ 的長度。 (100華江高中2招)



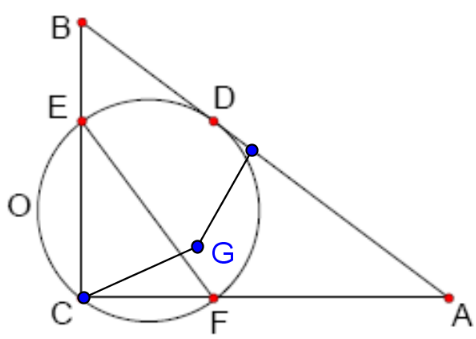
答. 260。

630. 在矩形 $ABCD$ 中，G、H 爲 $\overline{AD}$ 的三等分點，E、F 爲 $\overline{BC}$ 的三等分點，若 $\overline{AB} = 36$，$\overline{BC} = 45$，試求四邊形 $PQSR$ 的面積。 (100家齊女中)



答. 45。

631. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB} = 10$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 6$，圓 O 爲過 C 且與 $\overline{AB}$ 相切的最小圓，圓 O 交 $\overline{BC}$ 於 E，交 $\overline{AC}$ 於 F，則 $\overline{EF}$ 的長爲 ________。 (100麗山高中)



答. $\frac{24}{5}$。

632. O 爲原點，□$OABC$ 爲正方形，已知點 $P(2,0)$ 在 $\overline{AB}$ 邊上，點 $Q(\sqrt{3},1)$ 在 $\overline{BC}$ 邊上，則正方形面積爲何？ (99大安高工2招)

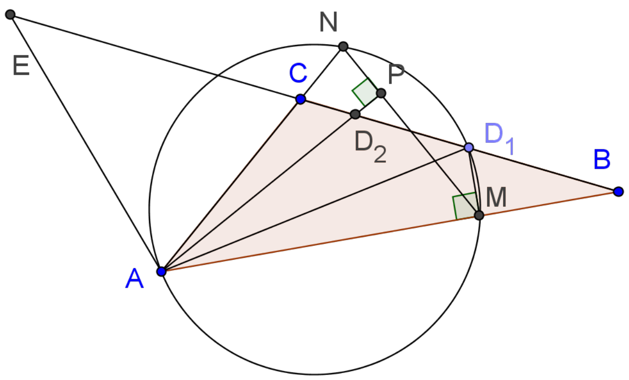
答. 3。

633. 設橢圓 Γ : $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1, A>B$ 之橢圓二焦點爲 F_1, F_2, O 爲原點， P 爲 Γ 上動點，且 $\triangle POF_1$ 爲一正三角形，$\triangle POF_1$ 面積爲 $\sqrt{3}$，求 B。 (100永春高中代理)

答. $2\sqrt{3}$。

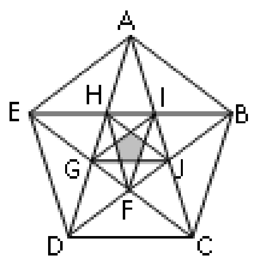
634. $\star$ $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}>\overline{AC}$，$D_1$ 在 $\overline{BC}$ 上，以 $\overline{AD_1}$ 爲直徑做一圓，交 $\overline{AB}$ 於 M 點，交 $\overline{AC}$ 的延長線於 N 點。作 $\overline{AP}$ 垂直 $\overline{MN}$ 於 P 點，且 $\overline{AP}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D_2。作角 A 的外角平分線交 $\overline{BC}$ 的延長線於 E 點，證明: $\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{1}{D_1E}+\frac{1}{D_2E}$。 (100板橋高中)

證. 令 $\angle BAC$ 之角平分線與 $\overline{BC}$ 交點爲 F，則有角平分線性質可得 $\overline{EF}=\frac{2\overline{BE}\cdot\overline{CE}}{\overline{BE}+\overline{CE}}=\frac{2}{\frac{1}{\overline{BE}}+\frac{1}{\overline{CE}}}$。由此，僅須證明 $\angle BAC$ 與 $\angle D_1AD_2$ 有相同的角平分線，因此只須證明 $\angle BAD_1=\angle D_2AC$。



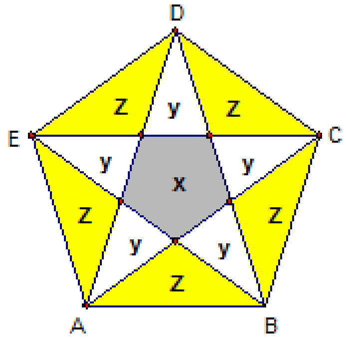
而 $\angle APN=\angle AMD_1=90°$，$\angle AD_1M=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}=\angle ANM=\angle ANP$，故 $\triangle AD_1M\sim\triangle ANP\Rightarrow\angle BAD_1=\angle MAD_1=\angle PAN=\angle D_2AC$。故得 $\angle D_1AD_2$ 和 $\angle BAC$ 有同一條角平分線。由角平線性質可推得 $\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{EF}=\frac{1}{D_1E}+\frac{1}{D_2E}$。

635. 連接正五邊形 $ABCDE$ 的五條對角線，圍成一個較小的正五邊形 $FGHIJ$，在繼續作五條對角線再圍成更小的正五邊形，如灰色區域。若灰色區域的邊長爲 1，則正五邊形 $ABCDE$ 的面積爲灰色面積的 $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^k$倍，則 $k=$ ________。 (100楊梅高中)



答. $k=8$。

636. 將一個正五邊形 $ABCDE$ 的部份面積分別記為 x, y, z (如圖)，已知 $x=1$，求實數序組 $(y, x+5y+5z)=$________。 (99中興高中)

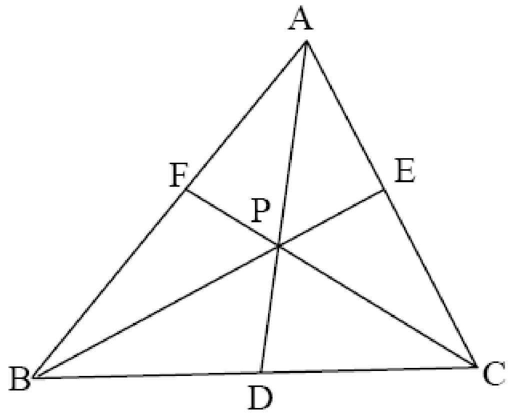


答. $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{7+3\sqrt{5}}{2})=(\frac{\sqrt{5}}{5}, (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^4)$。

637. ⋆右圖中，P 為三角形 ABC 內部一點，已知 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{PE}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{PF}}=2012$，試求 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}\times\frac{\overline{BP}}{\overline{PE}}\times\frac{\overline{CP}}{\overline{PF}}$。

答. 2014。 (101中科實中)

解. 設面積 $\triangle PAB=x, \triangle PBC=y, \triangle PCA=z, w=x+y+z$。
則原等式可改寫為 $\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}=2012$。
注意對稱性，補三個 1 到左式，然後放到分子，分子就一樣了。得 $w(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=2015$。
所求則為 $\frac{x+z}{y}\cdot\frac{x+y}{z}\cdot\frac{y+z}{x}$，一樣注意對稱性，



改寫分子為 $(\frac{w-y}{y})(\frac{w-z}{z})(\frac{w-x}{x})=\frac{w^3-(x+y+z)w^2+(xy+yz+zx)w-xyz}{xyz}$。
而其中 $x+y+z=w \Rightarrow w^3-(x+y+z)w^2=0$，$\frac{(xy+yz+zx)w}{xyz}=w(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=2015$。
所以所求為 $0+2015-1=2014$。

638. $\triangle ABC$ 中，$A(2,-4)$，若 $\angle B$、$\angle C$ 之角平分線分別為 $L_1: x+y-2=0$ 及 $L_2: x-3y-6=0$，則 $\overleftrightarrow{BC}$ 之方程式為________。 (101文華高中)

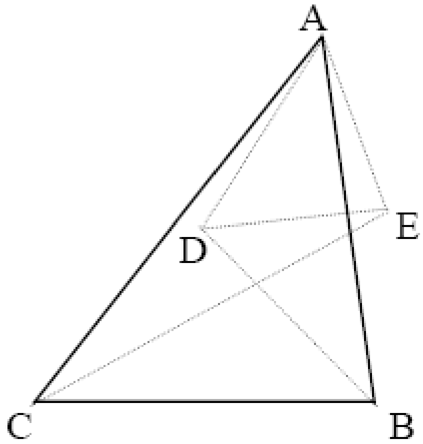
答. $x+7y-6=0$。

提示. A 對 L_1, L_2 作對稱點，必落在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上。

639. $\triangle ABC$ 中，A 坐標為 $(-7,15)$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分線方程式各為 $2x-y+4=0$, $x+7y+2=0$，求 B 點和 C 點的坐標。 (缺)

答. $C(-9,1), B(3,-10)$。

640. ⋆ 已知 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}=\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\sqrt{6}$, $\overline{AC}=\sqrt{7}$, $\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CE}$ 分別平分 $\angle B$、$\angle C$，且 $\angle ADB=90°$, $\angle AEC=90°$，如右圖，則 $\overline{DE}=$ ________。 (98師大附中)



答. $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2}$。

解. 見 老王的夢田。

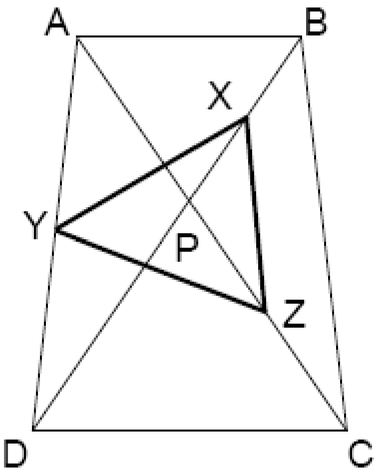
641. 設 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$, $\overline{BC}=2\sqrt{39}$。點 E, F 分別在 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 上且 $\overline{BE}\perp\overline{AC}$, $\overline{CF}\perp\overline{AB}$，又 $\overline{BE}$ 交 $\overline{CF}$ 於 P 點。若 $\overline{CP}=2\sqrt{3}$，求

(1) $\triangle ABC$ 的面積。

(2) $\triangle AEF$ 的外接圓的面積。 (99松山家商)

答. (1) $35\sqrt{3}$ (2) 13π。

642. 如下圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$ 且 $\overline{BC}=\overline{AD}$，又 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BD}$ 的交點為 P，設 $\overline{BP}$, $\overline{CP}$, $\overline{AD}$ 的中點依次為 X, Y, Z，且 $\triangle APB$ 為正三角形，試證 $\triangle XYZ$ 為正三角形。 (99育成高中)

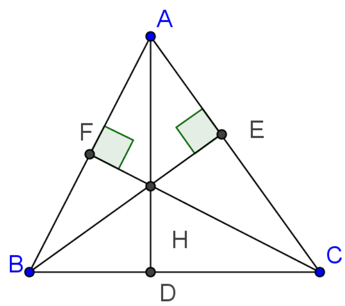


證. $\triangle PDC\sim\triangle PBA\Rightarrow\triangle PDC$ 是正 $\triangle$。
Z 為 $\overline{PC}$ 中點 $\Rightarrow\angle DZA=90°$。
Y 為直角 $\triangle AZD$ 之斜邊中點，
故 $\overline{YD}=\overline{YZ}=\frac{1}{2}\overline{AD}$。
同理 $\overline{XY}=\frac{1}{2}\overline{AD}$。而 X, Z 為 $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ 中點
$\Rightarrow\overline{XZ}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AD}$。因此三邊等長，得證。

643. 銳角三角形三高 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 交於 H，證 (99建中市內)

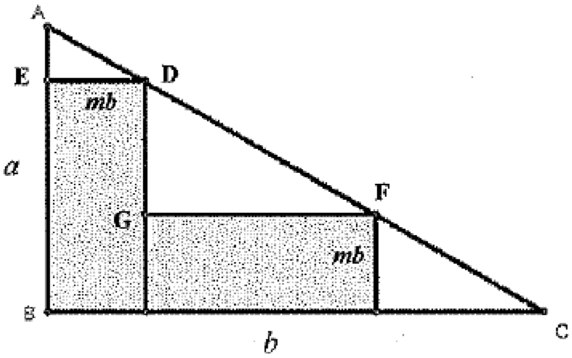
(1) $\frac{\overline{CH}}{\overline{FH}}=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}$。

(2) $\frac{\overline{AH}}{\overline{HD}}+\frac{\overline{BH}}{\overline{HE}}+\frac{\overline{CH}}{\overline{HF}}\geq 6$。



證(1) 如圖 $\angle AEH=\angle AFH=90°\Rightarrow\angle EHF=\pi-\angle A\Rightarrow\angle FHB=\angle A$，同理 $\angle CHD=\angle B$, $\angle BHD=\angle C$。
$\overline{CH}\cos B=\overline{HD}=\overline{BH}\cos C$, $\overline{BH}\cos A=\overline{FH}$，相乘得
$\overline{CH}\cos A\cos B=\overline{FH}\cos C\Rightarrow\frac{\overline{CH}}{\overline{FH}}=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}$。

644. 如圖，兩個全等之矩形置於一直角三角形內，並使其的邊各與三角形之一股重合。設兩股長 a, b 可以調整，又矩形短邊形 mb，則 m 之最大值為 ________。 (99建國高中)



答. $\frac{1}{5}$。

解. 不失一般性，令 $a = 1$，矩形兩邊長 $x, y = mb$。則有 $\frac{1-x}{y} = \frac{1}{b} = \frac{x-y}{x}$
$\Rightarrow y = b - bx, bx - by = x$
$\Rightarrow b^2 - b^2x - bx + x = 0 \Rightarrow x = \frac{b^2}{b^2+b-1}$，
$y = \frac{b^2-b}{b^2+b-1}$，故 $m = \frac{y}{b} = \frac{b-1}{b^2+b-1}$。

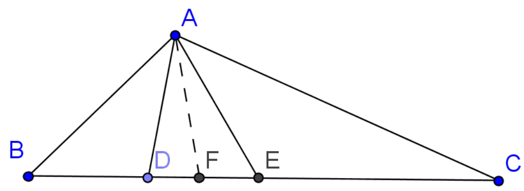
$\Rightarrow mb^2 + (m-1)b - (m-1) = 0 \Rightarrow (m-1)^2 + 4m(m-1) \geq 0 \Rightarrow (m-1)(5m-1) \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$ 或 $m \leq \frac{1}{5}$。$m \geq 1$ 不合。剩下要驗 $m = \frac{1}{5}$ 時，$\frac{b^2}{5} - \frac{4}{5}b + \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow b = 2, x = \frac{4}{5}$。

645. ⋆ $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 90°$，$\overline{AB} = 1$，若延長 $\overline{AC}$ 到 D，並使得 $\overline{AB} = \overline{CD} = 1$，若 $\angle CBD = 30°$，求 $\overline{AC}$ 長。 (99屏北高中)

答. $\sqrt[3]{2}$。

解. 令 $\overline{AC} = x$，由 D 作 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，交 $\overrightarrow{AB}$ 於 E 點則，$\overline{BE} = \frac{1}{x}$ (由 $\cos A = \frac{1}{x}$)。$\angle EDB = \angle CBD = 30° \Rightarrow \overline{BD} = \frac{2}{x}$。再由畢氏定理得 $\overline{DE}^2 = \frac{3}{x^2} = (x+1)^2 - (1+\frac{1}{x})^2 \Rightarrow (x+2)(x^3-2) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$。

646. 如圖所示，點 D, E 在 $\triangle ABC$ 的邊 $\overline{BC}$ 上，滿足 $\angle BAD = \angle CAE$。若 $\overline{BD} = 3$, $\overline{DE} = 2, \overline{EC} = 4$，則 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ 之比值為 ________。 (99華江高中)



答. $\frac{\sqrt{10}}{4}$。

提示. 作 $\angle DAE$ 角平分線交 $\overline{BC}$ 於 F，注意 $\overline{AF}$ 同時亦為 $\angle BAC$ 的角平分線。

647. 一光線通過 $(-4\ ,\ 5)$，經 x 軸反射後與圓：$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ 相切，求原光線之方程式為 ________。 (99文華高中)

答. $2x + y + 3 = 0$。

提示. 考慮對稱於 x 軸的圓 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 5$。

評. 類似的反射對軸常用於極值問題，見 17-3。

648. 已知等腰三角形，若腰上的中線長為 6，求三角形面積的最大值。 (99屏北高中)

答. 24。

649. 設 $\triangle ABC$ 爲一等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，已知 $\angle B$ 的平分線交對邊 $\overline{AC}$ 於 D 點，且 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DA}$，則 $\angle A$ 是 ________ 度。 (99中壢家商)

答. 100°。

解. 作 $\overline{DE}//\overline{BC}$ 且 E 在 $\overline{AB}$ 上，又 $\overline{BD}$ 爲 $\angle B$ 之分角線可得 $\triangle EBD$ 爲等腰三角形且 $\overline{BD}=\overline{BE}$，由對稱知 $\overline{BE}=\overline{CD}$，故 $\overline{CD}=\overline{DE}$。
在 $\overline{BC}$ 上找 F 使得 $\overline{CF}=\overline{DA}$，則 $\triangle CDF\cong\triangle DEA$ (SAS 全等)，而 $\triangle ADE$ 爲等腰三角形，故 $\triangle CDF$ 亦爲等腰三角形且 $\overline{FD}=\overline{FC}=\overline{AE}=\overline{AD}$，又 $\overline{BF}+\overline{FD}=\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$，故 $\overline{BD}=\overline{BF}\Rightarrow\angle BDF=\angle BFD$。而 $\triangle CDF$ 等腰可知 $\angle BFD=2\angle C$。
由 $\triangle BDF$ 之內角和知 $180^\circ=\frac{\angle B}{2}+\angle BDF+\angle BFD=\frac{9}{2}\angle C\Rightarrow\angle C=40^\circ$ $\Rightarrow\angle A=100^\circ$。

650. 兩圓 $x^2+y^2=16,(x-6)^2+(y-1)^2=4$ 的外公切線的交點爲 ____。 (97師大附中)

答. $(12,2)$。

解. 畫圖，由相似形得外分點：$\frac{-2}{4-2}(0,0)+\frac{4}{4-2}(6,1)=(12,2)$。

651. 正 $\triangle DEF$ 內接於正 $\triangle ABC$ 且 $\overline{DE}\perp\overline{BC}$，那麼 $\triangle DEF$ 的面積爲 $\triangle ABC$ 的面積之 ________。 (97師大附中)

答. $\frac{1}{3}$。

652. $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=120^\circ$，$\overline{AB}=3$ 且 $\overline{BC}=4$。若從 A 作 $\overline{AB}$ 的垂線與從 C 作 $\overline{BC}$ 的垂線相交於 D 點，則 $\overline{CD}=$ ____。 (97師大附中)

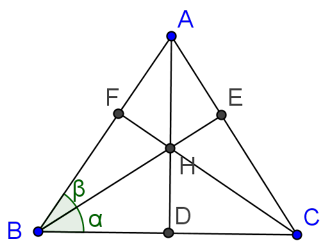
答. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$。

653. 已知 $\triangle ABC$ 爲正三角形且點 A、B、C 皆落在邊長爲 1 的正六邊形的邊上，若點 A 將其所在的邊分成長度爲 $1:2$ 的兩段，求 $\overline{AB}^2$ 之值。 (97陽明高中)

答. $\frac{7}{3}$。

654. 三角形 ABC，$\angle A$ 的內角平分線 $\angle AT$ 交 $\overline{BC}$ 於 T 點，試證 $\overline{AT}=\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AC}-\overline{BT}\cdot\overline{CT}}$。 (98新港藝術)

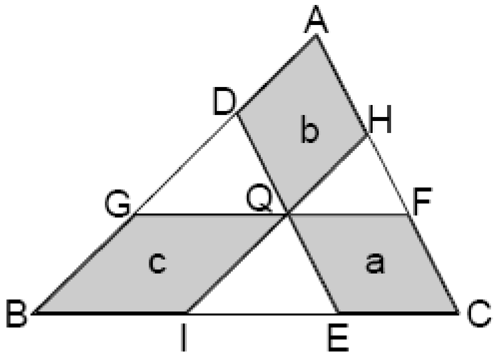
655. 已知 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，由 H 分別作 $\overline{HD}\perp\overline{BC},\overline{HE}\perp\overline{CA}$, $\overline{HF}\perp\overline{AB}$。試証：$\overline{HD}:\overline{HE}:\overline{HF}=\sec A:\sec B:\sec C$。 (97潮州高中)



證. $\frac{\overline{HD}}{\overline{HF}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\angle C)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\angle B)}=\frac{\sec A}{\sec C}$，同理其中兩組也一樣，故得證。

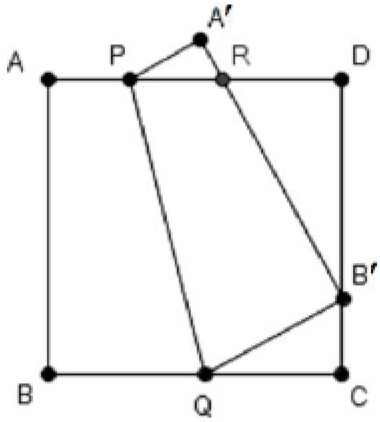
656. 如圖：通過 $\triangle ABC$ 內部一點 Q，引平行於三角形三邊的直線，這些直線分三角形爲六個部分，已知三個平行四邊形面積爲 $a=1, b=1, c=2$，則 $\triangle ABC$ 的面積 $=$ ____。

答. $\frac{25}{4}$。 (98清水高中)



解. 面積比例可得線段比 $\frac{QF}{QG}=\frac{1}{2}, \frac{QH}{QI}=\frac{1}{2}$, $\frac{QD}{QE}=1$，再用三角形面積$=\frac{1}{2}ab\sin\theta$，將餘下三塊三角形的面積寫成相對平形四邊形面積乘上線段比。$\triangle QHF=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{4}=\frac{1}{4}$, $\triangle QDG=\frac{1}{2}\cdot 2a=1, \triangle QIE=\frac{1}{2}\cdot 2b=1$。所以總面積爲 $\frac{25}{4}$。

657. 如圖，$ABCD$ 是邊長爲 1 的正方形，沿 $\overline{PQ}$ 對折，使得 A, B 對折之後分別重合於 A', B' 兩點，且 B' 在 $\overline{CD}$ 上， (97大里高中)



(1) 證明 $\triangle RB'D$ 的周長爲 2。

(2) 求 $\triangle QB'C$ 的最大面積。

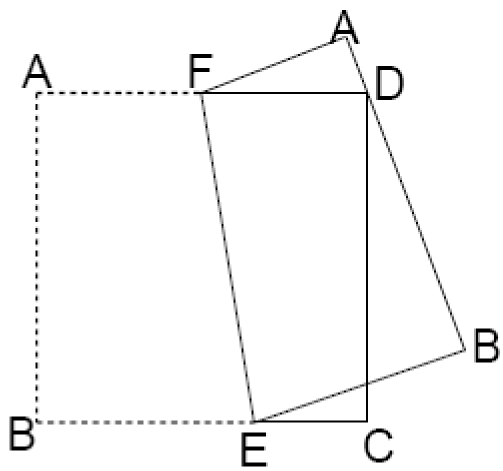
答. (2) $\frac{\sqrt{3}}{18}$。

證(1) 令 $\theta=\angle B'BC, t=\tan\theta=\overline{B'C}$，則 $\angle B'QC=\angle RB'D=2\theta, \overline{B'D}=1-t$。因此 $\triangle RB'D$ 之周長 $=(1-t)\cdot(1+\tan 2\theta+\frac{1}{\cos\theta})=(1-t)\cdot(1+\frac{2t}{1-t^2}+\frac{1+t^2}{1-t^2})=2$。

解(2) 承上，$\triangle QB'C$ 面積 $=\frac{1}{2}t\cdot\frac{t}{\tan 2\theta}=\frac{1}{4}(t-t^3)$，其中 $0<t<1$，微分易得 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 時，有最大面積 $\frac{\sqrt{3}}{18}$。

658. 正方形 $ABCD, \overline{BE}=2\overline{BC}$(應爲 $2\overline{CE}$)，將 $ABEF$ 延 EF 線段往右折，使得 D 點落在 $\overline{AB}$ 線段上，如圖所示。則 $\sin\angle AFD=$ ________。 (98新港藝術)

答. $\frac{6-\sqrt{6}}{10}$。



解. 令 $\angle AFD=\theta, \overline{EC}=1$, 則
$\frac{1}{\cos\theta}+(3-\tan\theta)\sin\theta=2$。
$\Rightarrow 1+3\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta=2\cos\theta$
$\Rightarrow \cos\theta+3\sin\theta=2$。
$\Rightarrow \sin\theta=\frac{6\pm\sqrt{6}}{10}$，又 $\cos\theta+3\sin\theta=2$ 且 θ 爲銳角，故 $\sin\theta\le\frac{2}{3}$，因此 $\sin\theta=\frac{6-\sqrt{6}}{10}$。

659. 如右圖，H 爲 $\triangle ABC$ 之垂心，$\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$，若面積比 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle ACH=1:2:3$，則邊長比 $a:b:c=$ ________。 (101南港高工)

答. $2\sqrt{2}:3:\sqrt{5}$。

解. 令 D 爲 H 對 $\overline{BC}$ 之垂足，則有 $\angle BHD=\angle C, \angle CHD=\angle B$。$\triangle ABH:\triangle ACH=\triangle BHD:\triangle CHD=\tan C:\tan B$，同理可得另一組比，而得 $\tan A:\tan B:\tan C=2:3:1$，令 $\tan C=t$，則 $\frac{t+2t}{1-2t^2}=-3t \Rightarrow t=0,\pm 1$。其中 $t=0$ 不合， $t=-1$，三角皆鈍角亦不合，故 $\tan C=t=1$。
再由正弦定理可得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{2}{\sqrt{5}}:\frac{3}{\sqrt{10}}:\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}:3:\sqrt{5}$。

13.2 空間幾何

660. 一模型公司在一個內部邊長爲 2 單位的透明正立方體箱子內，放置一顆半徑爲 1 單立的大球，然後又要在箱子的八個角落再塞入 8 顆相同大小的小球。問：小球的最大半徑爲 ________ 單位。 (100華江高中2招)

答. $2-\sqrt{3}$。

解. 考慮長度爲 $2\sqrt{3}$ 的對角線長，被分成數段：$2+2\cdot(1+\sqrt{3})r=2\sqrt{3}$
$\Rightarrow r=2-\sqrt{3}$。

661. 一個邊長 10cm 的正立方體內塞九個大小相同的球，中心球的球心在正立方體的中心，其他球皆與三個相鄰面以及中心球相切，求球的半徑。 (100豐原高中)

答. $10\sqrt{3}-15$。

662. 一個正四面體盒子內部邊長爲 8，要在四面體內部放入 35 顆一樣大小的球，求放入球的最大半徑 $=$ ________ (分母須有理化成整數) (99文華高中)

答. $\frac{8-2\sqrt{6}}{5}$。

663. 在一個邊長爲 1 的正四面體中，放入大小相同的 20 顆球，試求球的最大半徑爲 ____。

答. $\frac{3-\sqrt{6}}{6}$。 (97台中二中)

664. 考慮一個正四面體與其內切球與外接球。今在正四面體之四個側面，均有一個最大球與其相切也和外接球相切(此球在正四面體的外部)。若在外接球的內部任取一個點 P，則 P 不落在內切球內部也不落在正四面體外圍的四個球內之機率爲何？ (100慈濟聯招)

答. $\frac{22}{27}$。

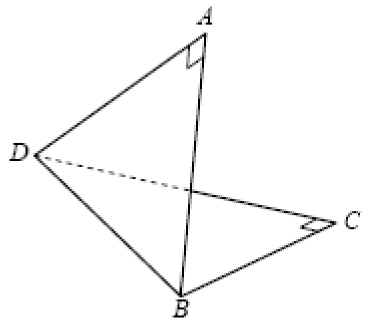
665. 想將一半徑 3 公分的球投進一個三角形的球框，因球太大被卡在框架上，若此三角形球框三邊長爲 3, 4, 6 公分，則球心到此三角形所決定的平面的最短距離爲 ________ 公分。 (100南港高工)

答. $\sqrt{\frac{433}{52}}$。

666. 一厚度超過 5 的水平放置木板上，穿有一邊長爲 10 的正三角形的洞，今將半徑 5 的硬球放入正三角形，則木板上球的高度爲 ________。 (99文華2招代理)

答. $\frac{5\sqrt{6}}{3}+5$。

667. 如右圖，長方形紙 $ABCD$, $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=3$，沿著對角線 $\overline{BD}$ 摺起，使 A 點在平面 BCD 上之投影恰落在 $\overline{CD}$ 邊上，求此時四面體 $ABCD$ 的體積爲 ________。 (100麗山高中2招)



答. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$。

668. ⋆ 空間中，四面體 $A-BCD$，$\overline{AB}=\overline{CD}=6$，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=5$，$\overline{BD}=7$，求四面體 $A-BCD$ 的體積。 (101文華高中)

答. $4\sqrt{23}$。

解. 見 Mathpro 101文華高中 有各種解法(#40,42,65,86,95)。

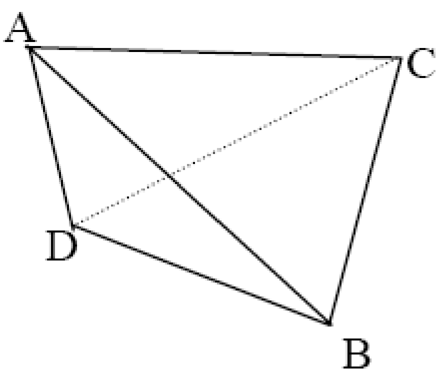
669. 四面體 $PABC$，今若以 P 爲球心，$\overline{PA}$ 爲半徑作一球面，則 B 與 C 也同時落在球面上，且知 $\overline{PA}=\sqrt{10}$, $\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=5$ 及 $\overline{AB}=6$，試求點 P 至平面 ABC 的距離。

答. $\frac{\sqrt{42}}{7}$。 (99大安高工2招)

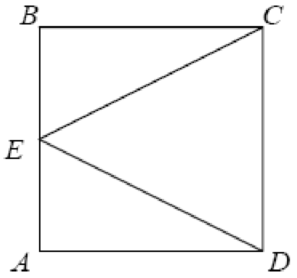
670. ⋆ 如圖，$A-BCD$ 爲空間中的三角錐，已知其稜長 $\overline{AC}=\overline{BD}=10$, $\overline{AB}=\overline{CD}=17$, $\overline{AD}=\overline{BC}=3\sqrt{29}$，求三角錐 $A-BCD$ 的體積。 (99台中一中)

答. 240。

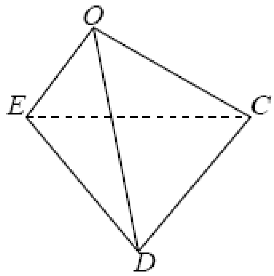
解. 考慮 $a,b,c>0$, $a^2+b^2=100$, $b^2+c^2=289$, $c^2+a^2=261$，聯立得 $a=6, b=8, c=15$。則以 a, b, c 爲三邊爲長寬高的長方體，挖去 4 個不相鄰的角落後，即剩下一三角錐恰與 $A-BCD$ 全等。故所求 $=abc-4\cdot\frac{1}{6}abc=240$。



671. ⋆ 如下圖(1)，用邊長 20cm 的正方形紙板 $ABCD$ 做模型，做法：取 $\overline{AB}$ 邊上的 E 點，連結 $\overline{CE}$、$\overline{DE}$，沿 $\overline{CE}$ 和 $\overline{DE}$ 將 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCE$ 折起，並將 $\overline{EA}$、$\overline{EB}$ 連接起來，此時 A 與 B 重合於 O 點，如下圖(2)，則這個四面體模型 $OCDE$ 的容積爲 ________ 立方公分。 (100彰化女中)



圖(1)



圖(2)

答. $\frac{1000\sqrt{3}}{3}$。

672. 四面體邊長分別爲 1, 1, 1, 1, a, b (其中 a, b 爲歪斜線段長)，試求四面體體積最大值。

答. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$。 (100鳳山高中)

673. $O-ABC$爲一四面體，$\triangle ABC$ 是邊長爲 4 之正三角形，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=a$，兩歪斜稜 $\overline{OA}$ 與 $\overline{BC}$ 間的距離是 $\sqrt{3}$，求 a 的值。 (98曉明女中)

答. $\frac{8}{3}$。

674. $A(6,0,0)$, $B(-3,3\sqrt{2},3)$ 爲球面 $x^2+y^2+z^2=36$ 上兩點，今有一隻公蟻沿著球面由 A 爬到 B，公蟻的爬行路線中最短距離是多少? (100家齊女中)

答. 4π。

解. $\cos\theta=\frac{(6,0,0)\cdot(-3,3\sqrt{2},3)}{6\cdot\sqrt{9+18+9}}=\frac{-18}{36}=\frac{-1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$最短距離 $6\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{12\pi}{3}$。

675. 設球面 $S: x^2+y^2+z^2=10$ 上兩點 $A(-2,\sqrt{5},1)$, $B(1,0,-3)$ 一隻螞蟻沿球面從 A 走到 B，其最短路程爲 ________。 (98中興高中)

答. $\frac{2\sqrt{10}\pi}{3}$。

676. 直線 $L:\begin{cases} x+y-3z=3 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$ 與球面 $S: x^2+y^2+z^2=4$ 交於 A, B 兩點，則球面 S 上 A, B 兩點間之最短路徑長爲 ________。 (97中興高中)

答. $\frac{4\pi}{3}$。

677. 有一地球儀，其赤道長爲 150 公分，若 A 地位於赤道上東經 $10°$，B 地位於北緯 $45°$，東經 $145°$，求 AB 兩地之球面最短距離爲 ________ 公分。 (99台中一中)

答. 50。

678. 假設地球爲一球體。今以地球球心爲原點，地球半徑爲單位長，建立一直角坐標系。設地球表面上有甲乙丙三地，甲、乙兩地的坐標分別爲 $(1,0,0)$、$(\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{6}{7})$，而丙地正好是甲乙兩地之間最短路徑的中點，則丙地的坐標爲 ________。 (98嘉義高中)

答. $(\frac{5}{\sqrt{35}},\frac{1}{\sqrt{35}},\frac{3}{\sqrt{35}})$。

679. 今一單位球(半徑爲 1 的球)球心爲原點，且球面上兩點 P、Q 座標分別爲 $P(1,0,0)$, $Q(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，延著球面行進，於 PQ 最短路徑中取一點 R，使得 $\overparen{PR}:\overparen{QR}=1:2$，試求 R 點座標。 (99大安高工)

答. $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$。

解. 以 x 軸爲軸，將 Q,R 轉至 xy 平面上，得 $Q'(0,1,0)$, $R'(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，再把它轉回去得 $R(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$。

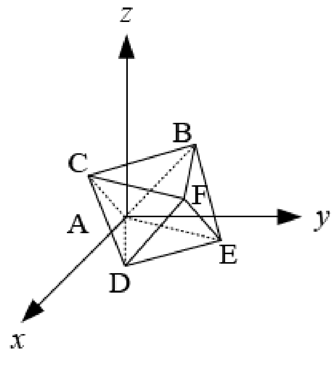
680. 已知 P 是正四面體 $ABCD$ 內部一點，而且滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\sqrt{11}$, $\overline{PC}=\overline{PD}=\sqrt{17}$。求正四面體 $ABCD$ 的邊長。 (100華江高中2招)

答. 6。

解. 注意 P 在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的垂直平分面的交線上，即 P 在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的公垂線 $\overline{H_1H_2}$ 上，其中 H_1 和 H_2 分別是 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的中點。
設邊長爲 a，$\overline{H_1P}:\overline{PH_2}=t:(1-t)$，則得 $\overline{H_1H_2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\overline{PA}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+t^2\cdot\frac{a^2}{2}}$, $\overline{PC}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+(1-t)^2\cdot\frac{a^2}{2}}\Rightarrow\frac{17}{11}=\frac{\frac{a^2}{4}+t^2\cdot\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{4}+(1-t)^2\cdot\frac{a^2}{2}}\Rightarrow t=\frac{2}{3}$, $a=6$。

681. 已知平面 E 上有不共線的三點 A,B,Q，而平面 E 外有一點 P，若直線 PQ 與 E 垂直，且 $\angle PAQ,\angle QAB,\angle PAB$ 皆爲銳角，求證：$\cos\angle PAQ\cdot\cos\angle QAB=\cos\angle PAB$。 (100成淵高中)

682. 正八面體 $ABCDEF$ 的邊長爲 2，如圖，已知 A 爲原點，A,D,E 爲 xy 平面上的點，B 爲 yz 平面上的點，則 B 到 y 軸的距離 $=$ ________。 (100北一女中)



答. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$。

683. 空間中，過原點，方向向量爲 $(1,-1,1)$ 的直線 L，求任意點 (a,b,c) 逆時針繞直線 L 旋轉 120° 之後的坐標爲何。(逆時針方向指的是右手定則的方向，亦即右手大姆指朝 $(1,-1,1)$ 方向時，四指的方向爲逆時針方向。) (100桃園新進聯招)

答. $(-b,-c,a)$。

解. 另解. 觀察平面 $x-y+z=1$ 與三軸交於 $(1,0,0),(0,-1,0),(0,0,1)$ 恰爲一正三角形。
因此旋轉將此三點輪換 $(1,0,0)\to(0,0,1)\to(0,-1,0)$。再由旋轉之線性得 $R_L((a,b,c))=(-b,-c,a)$。

684. 在以原點 $O(0,0,0)$ 爲球心，半徑爲 1 的單位球上取一點 $A(a_1,a_2,a_3)$。點 A 所對的另一點 $B(a_3,a_1,a_2)$ 有在這個單位球上。則 $\angle AOB$ 的最大值爲 ____。 (97家齊女中)

答. $\frac{2}{3}\pi$。

解. 該線性變換爲以 $(1,1,1)$ 爲軸之旋轉 120°。因此當 $\overline{OA}\perp(1,1,1)$ 時角度最大。
取 $A=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ 由內積得 $\cos\angle AOB=-\frac{1}{2}\Rightarrow\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$。

685. 一小球由原點 $O(0,0,0)$ 發射，撞擊到平面 $E_1: x+2y+2z=18$ 上一點 A，在經過平面 E_1 反射後，撞擊到平面 $E_1: 2x+y+2z=-10$ 上一點 B，再經由平面 E_2 反射後，彈向一個點 $C(-1,-1,1)$。試求 $\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}$ 之值。 (100永春高中代理)

答. $\sqrt{323}$。

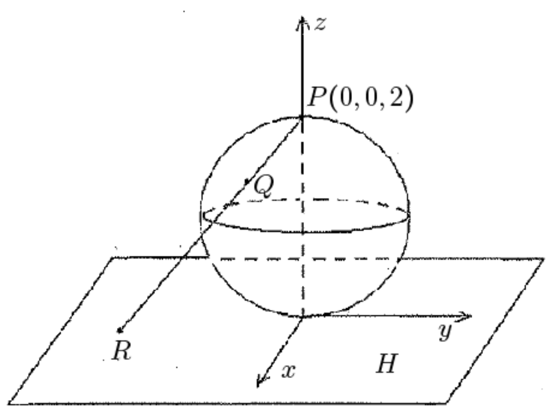
686. 設 $ABCD$ 爲正四面體，$\triangle ABC$ 內部一點 E，點 E 到 $\triangle DAB,\triangle DBC,\triangle DCA$ 距離之和 m，點 E 到 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 距離之和爲 M，求 $\frac{m}{M}$。 (99台中二中)

答. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

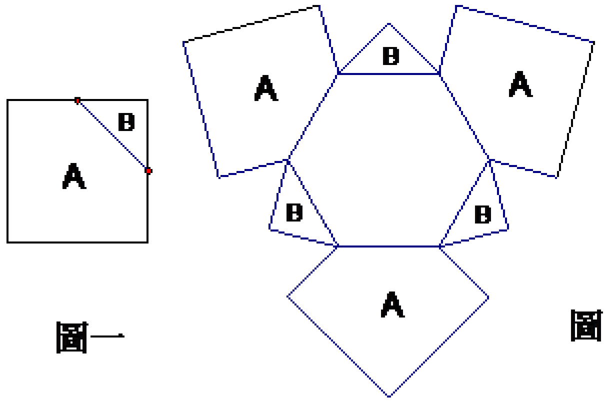
687. 設 xy–平面爲 H，球面 S 的方程式爲 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$，$P(0,0,2)$ 是球面 S 上一點。設函數 $\phi: H\to S$，若 R 爲 H 上任一點，定義 $\phi(R)$ 爲球面 S 與 $\overline{PR}$ 的交點 Q (異於 P)(如圖)。若 L 是 H 上任一條直線，試判斷 $\phi(L)$ 的圖形爲何? 並證明您的結論。 (99建國高中)

解. 一圓，令 E 爲過 P,L 的直線，則 $\phi(L)$ 即 E 與球面相交之圓($\overline{RP}$ 落在 E 上)。

評. 這是複變裡的 conformal map。



688. ⋆ 三個 8cm × 8cm 的正方形都被連接兩條鄰邊中點的直線分成 A、B 兩片(如圖一)，並將這六片粘在另一個 正六邊形的邊上(接縫部分不計)(如圖二)，然後折成一個多面體。求此多面體的體積爲 ________ cm^3。 (99中興高中)



圖一 圖二

答. 256。

解. 見令人讚嘆不已的神人老王。

689. 已知四面體 $P-ABC$ 中，各側面與底面所成的兩面角皆爲 $60°$，且 $\triangle ABC$ 的三邊長分別爲 $7, 8, 9$，試求 $\triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$ 的面積總和。 (99中壢高中)

答. $24\sqrt{5}$。

解. 考慮投影面積是 $\cos\theta$ 倍，因此所求 $= 2\triangle ABC = 24\sqrt{5}$。

13.3 解析幾何

複數平面

690. 已知 z 爲複數，且 $\frac{z}{z-1}$ 爲純虛數，求 $|z-i|$ 之最大值。 (99台中二中、98新港藝術)

答. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。

解. 在複數平面上點 A 代表 z，點 B 代表 $z-1$，點 C 爲 $\overline{AB}$ 中點代表 $z-\frac{1}{2}$，點 O 爲原點。

則 $\angle AOB = 90° \Rightarrow \triangle OAB$ 是直角三角形 $\Rightarrow \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow |z-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$。

畫圖爲一圓，極小發生在其圓心與 i 的連線上，$\max|z-i| = |i-\frac{1}{2}|+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$。

691. 設任意四邊形 $ABCD$ 的四個邊向外作正方形的四個中心點依序爲 M、N、O、P，試證 $\overline{PN} = \overline{MO}$ 且 $\overline{PN} \perp \overline{MO}$。 (100家齊女中)

證. 不失一般性假設 A, B, C, D 在坐標平面上逆時針排序。

以小寫字母 $a, b, c, \ldots$表示各點所代表之複數。

則 $m=d+\frac{1-i}{2}\cdot(a-d), p=a+\frac{1-i}{2}\cdot(b-a), o=b+\frac{1-i}{2}\cdot(c-b), n=c+\frac{1-i}{2}\cdot(d-c)$。
而 $n-p=\frac{1}{2}(-a-b+c+d)+\frac{i}{2}(-a+b+c-d), o-m=\frac{1}{2}(-a+b+c-d)+\frac{i}{2}(a+b-c-d)$。
觀察 $q-m=-i(n-p)\Rightarrow \overline{PN}=\overline{MN}$ 且 $\overline{PN}\perp\overline{MO}$。

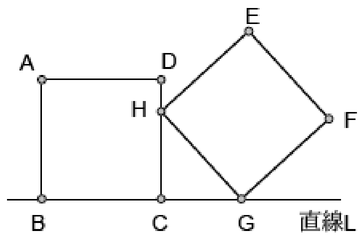
692. 設 α,β,γ 是三個相異複數，w 是 1 的立方根，若 $\alpha+w\beta+w^2\gamma=0$，試問在複數平面上表示 α,β,γ 的三點成什麼圖形? (99松山工農)

答. 正三角形。

註. w 是虛根。

平面坐標

693. 兩正方形 $ABCD$ 與 $EFGH$ 邊長均為 1，其中 $ABCD$ 固定平放在直線 L 上，如圖所示。若正方形 $EFGH$ 之一頂點 H 在 CD 上移動，且另一頂點 G 在直線 L 上移動，當 $\overline{BE}=\overline{BF}$ 時，$\overline{CG}=$ ________。 (100北一女中)



答. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$。

解. 令 B 為原點 $(0,0)$，$C(1,0), A(0,1), \overline{CG}=u$,
$\overline{CH}=\sqrt{1-u^2}$，則 $\overline{EF}$ 中點 $M(1+v+\frac{u}{2}, u+\frac{v}{2})$。
$\overline{BE}=\overline{BF}\Rightarrow \overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{EF}\Rightarrow u=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，取正。

694. 在第一象限中的四邊形 $ABCD$，其中四個頂點分別為 $A(2,8)$, $B(0,0)$, $C(4,2)$, $D(x,y)$。若 M, N, P, Q 分別為 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 的中點，且 $MNPQ$ 為正方形，則 $xy=$ ________。 (100新北聯招)

答. 12。

695. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 所對應的邊分別為 a, b, c 滿足 $b\le c$，且 b, a, c 成等差數列，已知 $B(-1,0), C(1,0)$，假若 $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{3}{5}\sqrt{3}$，則 A 點座標為 ________。

答. $(\frac{8}{5},\pm\frac{3}{5}\sqrt{3})$。 (99嘉義高工)

696. 已知四邊形 $ABCD$ 中 $\overline{AB}=16, \overline{BC}=25, \overline{CD}=15, \angle ABC, \angle BCD$ 皆為銳角，且 $\sin\angle ABC=\frac{24}{25}, \sin\angle BCD=\frac{4}{5}$，則 $\overline{AD}=$ ________。 (99嘉義高工)

答. 12。

697. 承上，$\overline{BD}=$ ________。 (98嘉義高中)

答. 20。

698. 菱形 $ABCD$ 內接於 $y=x$ 與 $y=x^2$ 所圍區域，C、D 在 $y=x$ 上，$\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 爲鉛直線。若 A 之坐標爲 (x_0,y_0)，則 $x_0+y_0=$ ________。 (100松山工農)

答. $2-\sqrt{2}$ 或 $8-5\sqrt{2}$。

699. 已知 $A(a,b), B(-a,b), C(0,\frac{1}{2})$ 爲橢圓 $\Gamma:\ x^2+4y^2=1$ 上的三點，若過 A, B, C 三點的圓半徑爲 r，則 $\lim\limits_{a\to 0} r=$ ________。 (100北一女中)

答. $2, \frac{1}{2}$。

解. $\overline{AB}$ 之中垂線爲 $x=0$；而 $\overline{AC}$ 之中垂線爲 $ax+(b-\frac{1}{2})y=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{4}}{2}$，二者聯立得 $y=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{4}}{2b-1}$，又 A 在 Γ 上，故 $y=\frac{\frac{3}{4}-3b^2}{2b-1}=\frac{3}{4}\frac{(1-2b)(1+2b)}{2b-1}$，$y\to -\frac{3}{2}$, as $b\to\frac{1}{2}$；$y\to 0$, as $b\to -\frac{1}{2}$。因此 r 分別收斂至 $2, \frac{1}{2}$。

評. a, b 關係式會有 $\sqrt{\ }$，故先不代換，待所求 y 之表示式整理後，從其形，將 a 消去而得較簡單的式子。

700. 若兩直線在 $y=ax^2$ 的頂點 O 互相垂直，且分別與拋物線交於 A、B 兩點，若 $\triangle OAB$ 的最小面積爲 4，則 $a=$ ________。 (100桃園高中)

答. $a=\pm\frac{1}{2}$。

701. 已知正方形 $ABCD$ 的兩頂點 A, B 在拋物線 $y^2=x$ 上，且 C, D 在直線 $L:\ y=x+4$ 上求正方形的面積? (99中壢高中2招)

答. 18 或 50。

702. 設 P 爲 $\triangle ABC$ 所在平面上的任一點，G 爲的重心，試證：$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{GP}^2$。 (99高雄市聯招)

703. 若與拋物線 $y=x^2$ 及直線 $y=0$ 均相切之圓的圓心爲 $P(a,3)$ 點，則 P 點坐標爲 ________。 (98全國聯招)

答. $a=0, \pm\sqrt{2}$, 或 $\pm\frac{5\sqrt{15}}{4}$。

解. 將 $y=x^2$ 代入 $(x-a)^2+(y-3)^2=9$ 得 $x^4-5x^2-2ax+a^2=0$。
相切 $\Rightarrow$ 微分後亦爲 $0\Rightarrow 2x^3-5x-a=0$。
兩式聯立得 $4x^6-23x^4+30x^2=0\Rightarrow x^2(4x^2-15)(x^2-2)=0$
$\Rightarrow x=0,\pm\frac{\sqrt{15}}{2},\pm\sqrt{2}\Rightarrow a=0,\pm\frac{5\sqrt{15}}{4},\pm\sqrt{2}$。

註. 原題爲選擇題。

704. 已知平面上有三圓 C_1, C_2, C_3，圓心分別爲 $(0,0)$, $(12,0)$, $(24,0)$，半徑分別爲 1, 2, 4，若 L_1 爲 C_1 與 C_2 的內公切線，且 L_1 斜率爲正，L_2 爲 C_2, C_3 的內公切線，且 L_2 斜率爲負，L_1 與 L_2 的交點爲 $P(x,y)$，令 $x = p - q\sqrt{r}$ (其中 p, q 爲有理數，r 爲沒有大於 1 的完全平方因數之整數)，求 $p+q+r$。 (99東山高中)

答. 27。

705. 在直角坐標平面上，設點 $P(-3,0)$ 且點 A 在 x 軸的正半軸(包含原點)上移動，點 B 在 y 軸上移動，且 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$，點 C 在直線 AB 上且滿足 $2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} = \vec{0}$，則點 C 的軌跡方程式爲 ________。 (98台北縣聯招)

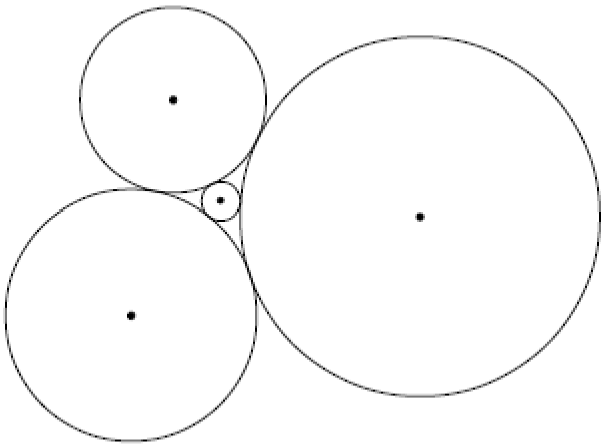
答. $y^2 = 4x$。

706. 座標平面上單位圓 $C: x^2+y^2=1$，一定點 $A(2,0)$，Q 爲圓 C 上一動點，以 Q 爲中心，將 A 點逆時針旋轉 90° 得 P 點，求動點 P 的軌跡方程式。 (98新港藝術)

答. $(\frac{x+y}{2}-1)^2 + (\frac{x-y}{2}+1)^2 = 1$。

707. 半徑爲 1cm、2cm、3cm 的三個圓互相外切，如圖所示。有一個圓落於它們之間，分別與這三個外切，求這個小圓的半徑。 (98清水高中)

答. $r = \frac{6}{23}$。



解. 坐標化，取半徑爲 1 的圓之圓心爲原點 O，半徑爲 2 的圓之圓心爲 $A(3,0)$，半徑爲 3 的圓之圓心爲 $B(0,4)$。設小圓圓心坐標 (x,y)，半徑爲 r。則有

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= (1+r)^2 \\ (x-3)^2+y^2 &= (2+r)^2 \\ x^2+(y-4)^2 &= (3+r)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-9 &= -3-2r \\ 8y-16 &= -4r-8 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 1-\frac{r}{3}, y = 1-\frac{r}{2}$ 代回可得 $(1-\frac{r}{3})^2 + (1-\frac{r}{2})^2 = (1+r)^2 \Rightarrow r = \frac{6}{23}$ 或 -6。因此 $r = \frac{6}{23}$。

708. ⋆ $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$, $\overline{AC} = 1$，設 P 爲其內部一點且 P 點到三邊 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 之距離 $\overline{PD}$, $\overline{PE}$, $\overline{PF}$ 比爲 $1:2:3$，若 $\overline{AP}^2 : \overline{BP}^2 : \overline{CP}^2 = 1:a:b$，求數對 (a,b)。 (99台中一中)

答. $(a,b)=(\frac{30+9\sqrt{3}}{7},\frac{15+6\sqrt{3}}{7})$。

709. 已知拋物線 $y=x^2+3x-1$ 上有相異兩點對直線 $x+y=0$ 成對稱，則此兩相異點的座標為 ____。 (97家齊女中)

答. $(1,3),(-3,-1)$。

710. 設 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{BC}$ 和 y 軸垂直，若 $A(2,9)$，內切圓圓心為 $(1,1)$，半徑為 4，則 $\triangle ABC$ 的垂心 H 坐標為 ________。 (99基隆女中)

答. $(2,\frac{3}{4})$。

平面族、圓系

711. 已知對所有的實數 k，圓 $C_k:\ x^2+y^2+(2k-8)x-(k+6)y+(9-10k)=0$ 都恆通過 A，B 兩點。若 $M(a,b)$ 為 $\overline{AB}$ 的中點，則 $a+b=$ ________。 (100新北聯招)

答. 8。

解. 移項 $x^2+y^2-8x-6y+9=k(-2x+y+10)$

$\Rightarrow (x-4)^2+(y-3)^2-16=k(-2x+y+10)$。

過任意 k 恆過 A,B，因此 $\overleftrightarrow{AB}:\ -2x+y+10=0$。

以代入消法與圓去方程式解聯立，再由根與係數關係得 $M(6,2)$。

712. 坐標空間中四面體 $ABCD$ 的頂點分別是 $A(3,1,2)$, $B(3,0,0)$, $C(0,2,0)$, $D(0,0,6)$，已知平面 E 通過 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點，且 A, B, C, D 四個頂點與平面 E 的距離皆相等，則平面 E 的方程式為 ________。 (98師大附中)

答. $2x+8y+z=11,\ 8x+12y+9z=39$。

713. 在空間中，通過直線 $\begin{cases} x &= 3+t \\ y &= 3-t,\ t\in\mathbb{R} \\ z &= 0 \end{cases}$，且與球 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4=0$ 相切的平面方程式為 ________。 (98嘉義高工)

答. $x+y\pm 2z=6$。

714. 設球面 $S_1:\ x^2+y^2+z^2=1$ 與球面 $S_2:\ (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ 交於一圓 C，若球面 S 包含圓 C 且被 x 軸所截線段長為 4，求球面 S 的方程式。 (97松山家商)

答. $x^2+y^2+z^2-6x-6y-6z+5=0$ 或 $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-3=0$。

空間坐標

715. 空間中三點 $A(2,2,1), B(1,3,-1), C(1,1,-1)$，空間中與 A, B, C 三點等距離的所有點形成圖形為 T，則 T 中與 $(0,0,0)$ 距離最近的點座標為 ________。 (99嘉義高工)

答. $(\frac{1}{5},2,\frac{2}{5})$。

716. 空間中三點 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$，今在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上取兩點 P, Q 使得 $\angle OPQ=\angle OQP=\frac{\pi}{4}$，其中 P 點 x 坐標不小於 Q 點 x 坐標，若 P 點對 xy 平面的垂足為 R，四面體 $OPQR$ 之體積為? (100基隆高中)

答. $\frac{2-\sqrt{2}}{27}$。

717. 設長方形 $ABCD$，其中 $\overline{AB}=3$ 與 $\overline{AD}=4$，若沿對角線 $\overline{AC}$ 對摺，則平面 ABC 與平面 ACD 之二面角為 60°，求對摺後 $\overline{BD}$ 長度。 (99大安高工)

答. $\frac{\sqrt{193}}{5}$。

718. 直角梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$, $\angle D=90^\circ$, $\overline{AB}=\overline{AD}=a$, $\overline{CD}=3a$，沿 $\overline{BD}$ 將梯形折成 60° 的二面角， 試求: 此時 A 與 C 的距離。 (99中壢高中)

答. $\frac{\sqrt{22}}{2}a$。

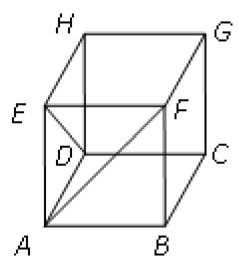
719. 過 $P(-1,2,-5)$ 之直線 L，交 $L_1: \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-2}$ 於 A 點，交 $L_2: \frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$ 於 B 點，試求出 B 點之坐標。 (100鳳新高中代理)

答. $(\frac{-23}{5},\frac{34}{5},\frac{11}{5})$。

解. 過 L_1, P 決定一平面 E，此平面與 L_2 之唯一交點即 B。
令 $\vec{d_1}=(1,2,-2), \vec{d}=(-1,2,-5)-(-2,3,-3)=(1,-1,-2)$。
$\vec{d}\times\vec{d_1}=(6,0,3)\Rightarrow E: 2x+z=-7$。
令 $B(2-3t,-2+4t,t)$ 代入 E 得 $t=\frac{11}{5}$, $B(\frac{-23}{5},\frac{34}{5},\frac{11}{5})$。

類題. 101師大附中1。

720. 如圖正立方體 $ABCD-EFGH$，邊長為 1，求直線 AF 與直線 DE 的距離。 (100鳳新高中代理)



答. $\frac{1}{\sqrt{3}}$。

721. 若平面 ABC 與平面 BDC 垂直，又已知 $\overline{BC}=6, \overline{AB}=\overline{AC}, \angle BAC=\angle BCD=90^\circ, \angle BDC=60^\circ$，則兩歪斜線 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 的距離爲 ________。 (99關西高中)

答. $\frac{6\sqrt{7}}{7}$。

722. 正四面體 $ABCD$ 中，A, B 落在直線 $L_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ 上，C, D 落在直線 $L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{5}$ 上，則正四面體 $ABCD$ 的邊長爲 ________。 (99中正高中)

答. $\frac{2\sqrt{105}}{15}$。

723. 正四面體的四頂點落在兩歪斜線 $L_1:\begin{cases}x=4+t\\y=-3-t\\z=0\end{cases}, s\in\mathbb{R}$ 與 $L_2:\begin{cases}x=2+s\\y=2+s\\z=1\end{cases}, s\in\mathbb{R}$ 上，求此四面體的稜長。 (100嘉義女中)

答. $\sqrt{2}$。

724. 同上，則此四面體四頂點中在第一卦限者爲 ________。 (99嘉義高工)

答. $(1,1,1)$。

725. ⋆ 有一個大正立方體由 27 個單位立方體所組成，今有一個平面垂直且平分大正立方體內部之對角線，試問該平面與幾個單位立方體相交？ (100慈濟聯招)

答. 19。

提示. 坐標化，將小立方體的頂點代入平面方程式檢驗。

解. 見 Mathpro100慈大附中。

726. 若地球方程爲 $x^2+y^2+z^2=100$，且北緯 θ 所在的平面方程式爲 $x+2y-2z=6$，請問南緯 3θ 所在的平面爲何？ (99屏北高中)

答. $x+2y-2z=-\frac{426}{25}$。

727. 有一四面體 $ABCD$，$\overline{AB}=6, \overline{CD}=8, \overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=7$，則 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的距離爲 ________。 (98玉井工商)

答. $2\sqrt{6}$。

728. 設 $A(0,1,2), B(-1,0,3), C(1,2,3)$，求 $\triangle ABC$ 的垂心坐標。 (98嘉義女中)

答. $(0,1,1)$。

解. $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,1)$，令 E_1 爲 $x+y-z=0$。$\overrightarrow{BC}=(2,2,0)$，令 E_2 爲 $x+y=1$。
$(1,1,-1)\times(1,1,0)=(1,-1,0)$，令 E_3 爲 $x-y=-1$。
三平面之交點即爲垂心。解得 $(x,y,z)=(0,1,1)$。

評. 三個未知數有時候有點麻煩，向量解法見 100台中二中6。

729. 空間中三個點 $A(0,1,2),B(-1,0,3),C(1,2,3)$，則 $\triangle ABC$ 的外心坐標爲 ________。

答. $(0,1,\frac{7}{2})$。 (98嘉義高中)

解. $\overrightarrow{BA}=(1,1,-1), E_1$: $x+y-z=-\frac{5}{2}$。$\overrightarrow{BC}=(2,2,0), E_2$: $x+y=1$
$\overrightarrow{BA}\times(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})=(1,-1,0), E_3$: $x-y=-1$。三平面交點：$(0,1,\frac{7}{2})$。

另解. 向量之解法解 100中和高中9。

730. 四面體 $ABCD$ 中，M,N 分別爲 $\overline{AD},\overline{BC}$ 的中點，$\overline{MN}\perp\overline{AD}$ 且 $\overline{MN}\perp\overline{BC}$，證明 (97大里高中)

(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$。

(2) $\overline{AC}=\overline{BD}$。

731. 如圖，在四稜錐 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，稜邊 $\overline{PA}$ 垂直底面，二面角 $P-BC-A$ 等於 45°。

(1) 試求 $\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}}$ 的值。 (97竹北高中)

(2) 求 $\overline{PD}$ 與截面 PAC 夾角。

答. (1) 1 (2) 30°。

732. $OABC$ 爲一邊長爲 1 的正四面體，D,E 分別爲 $\overline{AB},\overline{OC}$ 中點。兩歪斜線 $\overline{OD}$ 和 $\overline{BE}$ 的距離爲 ________。 (102建國中學)

答. $\frac{1}{\sqrt{10}}$。

解. 先放大 $\sqrt{2}$ 倍，坐標化，假設坐標分別爲 $O(0,0,0),A(0,1,1),B(1,0,1),C(1,1,0)$。
則 $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(1,1,2),\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(-1,1,-2)$。
令平面 F 包含 $\overline{BE}$ 且與 $\overline{OD}$ 平分，計算得其方程式爲 $2x-z-1=0$。
故此二歪斜線之距離爲 $d(O,F)=\frac{1}{\sqrt{5}}$。
再縮小，得所求 $=\frac{1}{\sqrt{10}}$。