國立臺中第一高級中學
101 學年度（2013 年）
第 1 次教師甄選數學科詳解

俞克斌老師　編授

第（1）題

答：722666

解：$\sum_{k=1}^{20} k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{5}\times 20\times 21\times 22\times 23\times 24=1020096$

$$\sum_{k=1}^{20} k^4=1020096-6\times\frac{20^2\times 21^2}{4}-11\times\frac{20\times 21\times 41}{6}-6\times\frac{20\times 21}{2}$$

$$=1020096-264600-31570-1260=722666$$

第（2）題

答：$\frac{29}{40}$

解：

x_i	y_i	$(x_i-\overline{X})$	$(y_i-\overline{Y})$	$(x_i-\overline{X})^2$	$(y_i-\overline{Y})^2$	$(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})$
29	6	−50	−25	2500	625	1250
39	41	−40	10	1600	100	−400
69	16	−10	−15	100	225	150
109	36	30	5	900	25	150
149	56	70	25	4900	625	1750
$\overline{X}=79$	$\overline{Y}=31$			10000	1600	2900

故相關係數$=\frac{2900}{\sqrt{10000}\times\sqrt{1600}}=\frac{2900}{100\times 40}=\frac{29}{40}$

第（4）題

答：2

解：$x^2-(k+3)x+(2k-1)=0$ 的兩根 α、β

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=k+3\\ \alpha\beta=2k-1\end{cases}\Rightarrow \alpha\beta-2\alpha-2\beta=-7\quad\Rightarrow(\alpha-2)(\beta-2)=-3$

$\Rightarrow\begin{array}{c|cccc}(\alpha-2) & 1 & -1 & 3 & -3\\ \hline (\beta-2) & -3 & 3 & -1 & 1\end{array}\quad\Rightarrow\alpha+\beta-4=-2,2\quad\Rightarrow(k+3)-4=-2,2$

$\Rightarrow k=-1,3$（均滿足判別式>0），故所有可能的 k 的和為 2

第（6）題

答：$2\sqrt{3}$

解：$\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\overline{AC}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\overline{BC}\right)^2=3^2\\\left(\frac{1}{3}\overline{AC}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\overline{BC}\right)^2=4^2\end{cases}\Rightarrow\left(\overline{AC}\right)^2+\left(\overline{BC}\right)^2=5\Rightarrow\begin{cases}\overline{AC}=2\sqrt{3}\\\overline{BC}=\sqrt{33}\end{cases}$

第（7）題

答：18

解：顯然 P 爲 ΔABC 重心，而 ΔABC 面積 $=3\times\frac{3\times4}{2}=18$

第（8）題

答：6360

解：$5\times4\times3\times2\times\left(1\times P_4^5-4\times P_3^4+6\times P_2^3-4\times P_1^2+1\times P_0^1\right)$

$=120\times(120-96+36-8+1)=120\times53=6360$

第（12）題

答：$-\frac{2}{5}$

解：$y=(\sin x)^{-\frac{1}{2}}+2(\cos x)^{-\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow y'=-\frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{3}{2}}(\cos x)-(\cos x)^{-\frac{3}{2}}(-\sin x)$

令 $y'=-\frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{3}{2}}(\cos x)^{-\frac{3}{2}}\left[(\cos x)^{\frac{5}{2}}-2(\sin x)^{\frac{5}{2}}\right]=0\quad\Rightarrow(\tan x)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}$

則 $\tan x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}=2^{-\frac{2}{5}}$，故 $\log_2(\tan x)=-\frac{2}{5}$

第（13）題

答：15

解：$\begin{bmatrix}0&0.25&0.25&0.25&0.25\\0.25&0&0.25&0.25&0.25\\0.25&0.25&0&0.25&0.25\\0.25&0.25&0.25&0&0.25\\0.25&0.25&0.25&0.25&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{n-1}\\Q_{n-1}\\R_{n-1}\\S_{n-1}\\T_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_n\\Q_n\\R_n\\S_n\\T_n\end{bmatrix}$

$\Rightarrow0.25(Q_{n-1}+R_{n-1}+S_{n-1}+T_{n-1})=P_n\quad\Rightarrow0.25(1-P_{n-1})=P_n$

$\longrightarrow\quad(P_n-0.2)=-0.25(P_{n-1}-0.2)$，且 $P_1=0$。故 $P_n=(-0.25)^{n-1}(-0.2)+0.2$

依題意：$\left|P_n-\frac{1}{5}\right|<10^{-9}\quad\Rightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\frac{1}{5}<10^{-9}\quad\Rightarrow2\times10^8<4^{n-1}$

$\Rightarrow\log2+(8)<(n-1)\log4\quad\Rightarrow n=14.7\cdots\quad\xrightarrow{n\in N}\quad n$ 最小取 15

第（14）題

答：18

解：每球造成空箱機率 $\left(\frac{4}{5}\right)$，且爲獨立事件，共有 n 球。聯合機率爲 $\left(\frac{4}{5}\right)^n$

共有 5 個箱子，故空箱數期望值爲$\left(\frac{4}{5}\right)^n \times 5$

依題意：$\left(\frac{4}{5}\right)^n \times 5 < 0.1 \quad \Rightarrow 50 < \left(\frac{5}{4}\right)^n \quad \Rightarrow \log 50 < n\left(\log 5 - \log 4\right) \quad \Rightarrow n = 17.5\cdots$