

大學入學考試中心  
102 學年度學科能力測驗試題  
數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 19 列的  $\frac{\square}{8}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\frac{-}{\square}$  與第 21 列的  $\frac{7}{\square}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

## 第壹部分：選擇題（占 60 分）

### 一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；

二、數學成績及格。

已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論是正確的？

(1) 小文的英文成績未達 70 分

(2) 小文的數學成績不及格

(3) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格

(4) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格

(5) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

2. 令  $a = 2.6^{10} - 2.6^9$ ， $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$ ， $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

(1)  $a > b > c$

(2)  $a > c > b$

(3)  $b > a > c$

(4)  $b > c > a$

(5)  $c > b > a$

3. 袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？

(1)  $\frac{1}{3}$

(2)  $\frac{5}{12}$

(3)  $\frac{1}{2}$

(4)  $\frac{3}{5}$

(5)  $\frac{2}{3}$

4. 已知以下各選項資料的迴歸直線(最適合直線)皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。

$$(1) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 1 & 13 & 1 \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 3 & 10 & 2 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

$$(4) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 9 & 1 & 5 \end{array}$$

$$(5) \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 7 & 4 & 4 \end{array}$$

5. 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。

- (1) 55  
(2) 66  
(3) 132  
(4) 198  
(5) 253

6. 莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10:00 熱氣球的仰角為  $30^\circ$ ，到上午 10:10 仰角變成  $34^\circ$ 。請利用下表判斷到上午 10:30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？

$\theta$	$30^\circ$	$34^\circ$	$39^\circ$	$40^\circ$	$41^\circ$	$42^\circ$	$43^\circ$
$\sin \theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos \theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan \theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

- (1)  $39^\circ$   
(2)  $40^\circ$   
(3)  $41^\circ$   
(4)  $42^\circ$   
(5)  $43^\circ$

## 二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設  $n$  為正整數，符號  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$  代表矩陣  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  自乘  $n$  次。令  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，請選

出正確的選項。

- (1)  $a_2 = 1$
- (2)  $a_1, a_2, a_3$  為等比數列
- (3)  $d_1, d_2, d_3$  為等比數列
- (4)  $b_1, b_2, b_3$  為等差數列
- (5)  $c_1, c_2, c_3$  為等差數列

8. 設  $a > 1 > b > 0$ ，關於下列不等式，請選出正確的選項。

- (1)  $(-a)^7 > (-a)^9$
- (2)  $b^{-9} > b^{-7}$
- (3)  $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$
- (4)  $\log_a 1 > \log_b 1$
- (5)  $\log_a b \geq \log_b a$

9. 設  $a < b < c$ 。已知實係數多項式函數  $y = f(x)$  的圖形為一開口向上的拋物線，且與  $x$  軸交於  $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$  兩點；實係數多項式函數  $y = g(x)$  的圖形亦為一開口向上的拋物線，且跟  $x$  軸相交於  $(b, 0)$ 、 $(c, 0)$  兩點。請選出  $y = f(x) + g(x)$  的圖形可能的選項。

- (1) 水平直線
- (2) 和  $x$  軸僅交於一點的直線
- (3) 和  $x$  軸無交點的拋物線
- (4) 和  $x$  軸僅交於一點的拋物線
- (5) 和  $x$  軸交於兩點的拋物線

10. 坐標平面上考慮兩點  $Q_1(1,0), Q_2(-1,0)$ 。在下列各方程式的圖形中，請選出其上至少有一點  $P$  滿足內積  $\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} < 0$  的選項。

(1)  $y = \frac{1}{2}$

(2)  $y = x^2 + 1$

(3)  $-x^2 + 2y^2 = 1$

(4)  $4x^2 + y^2 = 1$

(5)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

11. 設  $F_1, F_2$  為橢圓  $\Gamma$  的兩個焦點。  $S$  為以  $F_1$  為中心的正方形 ( $S$  的各邊可不與  $\Gamma$  的對稱軸平行)。試問  $S$  可能有幾個頂點落在  $\Gamma$  上？

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 0

12. 設實數組成的數列  $\langle a_n \rangle$  是公比為  $-0.8$  的等比數列，實數組成的數列  $\langle b_n \rangle$  是首項為 10 的等差數列。已知  $a_9 > b_9$  且  $a_{10} > b_{10}$ 。請選出正確的選項。

(1)  $a_9 \times a_{10} < 0$

(2)  $b_{10} > 0$

(3)  $b_9 > b_{10}$

(4)  $a_9 > a_{10}$

(5)  $a_8 > b_8$

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（13-35）。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設  $k$  為一整數。已知  $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則  $k =$  ⑬⑭。

B. 設  $a, b$  為實數且  $(a+bi)(2+6i) = -80$ ，其中  $i^2 = -1$ 。則  $(a, b) =$  (⑮⑯), (⑰⑱)。

C. 坐標平面中  $A(a, 3), B(16, b), C(19, 12)$  三點共線。已知  $C$  不在  $A, B$  之間，且  $\overline{AC} : \overline{BC} = 3:1$ ，則  $a+b =$  ⑲⑳。

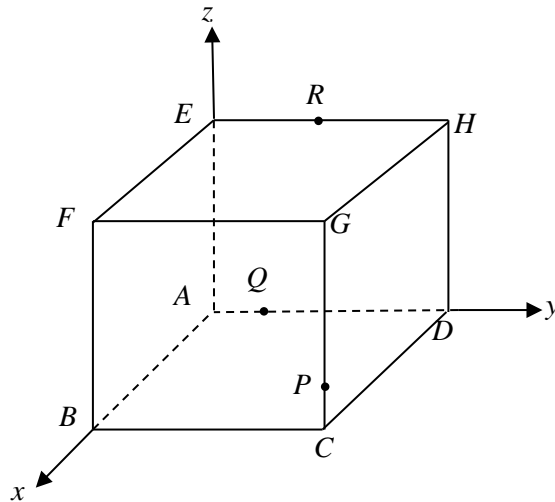
D. 阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；沒賣完的部份，第二天降價為每公斤 36 元；第三天再降為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元。假設阿德在第三天所賣香蕉的公斤數為  $t$ ，可算得第二天賣出香蕉的公斤數為  $at+b$ ，其中  $a =$  ㉑㉒， $b =$  ㉓㉔。

E. 坐標平面上，一圓與直線  $x-y=1$  以及直線  $x-y=5$  所截的弦長皆為 14。則此圓的面積為 ㉕㉖  $\pi$ 。

F. 令  $\vec{A}, \vec{B}$  為坐標平面上兩向量。已知  $\vec{A}$  的長度為 1,  $\vec{B}$  的長度為 2 且  $\vec{A}$  與  $\vec{B}$  之間的夾角為  $60^\circ$ 。令  $\vec{u} = \vec{A} + \vec{B}$ ,  $\vec{v} = x\vec{A} + y\vec{B}$ , 其中  $x, y$  為實數且符合  $6 \leq x+y \leq 8$  以及  $-2 \leq x-y \leq 0$ , 則內積  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  的最大值為 27 28。

G. 設銳角三角形  $ABC$  的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到  $\overline{AB}$  的距離為 2, 而到  $\overline{BC}$  的距離為 7, 則  $\overline{AC} = \underline{\underline{29\sqrt{30}}}$  31。(化成最簡根式)

H. 如下圖, 在坐標空間中,  $A, B, C, D, E, F, G, H$  為正立方體的八個頂點, 已知其中四個點的坐標  $A(0,0,0)$ 、 $B(6,0,0)$ 、 $D(0,6,0)$  及  $E(0,0,6)$ ,  $P$  在線段  $\overline{CG}$  上且  $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$ ,  $R$  在線段  $\overline{EH}$  上且  $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$ ,  $Q$  在線段  $\overline{AD}$  上。若空間中通過  $P, Q, R$  這三點的平面, 與直線  $AG$  不相交, 則  $Q$  點的  $y$  坐標為  $\frac{32}{34}$   $\frac{33}{35}$ 。(化成最簡分數)



### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X \sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.732$ ,  $\sqrt{5} \approx 2.236$ ,  $\sqrt{6} \approx 2.449$ ,  $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ,  $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ,  $\log_{10} 7 \approx 0.8451$