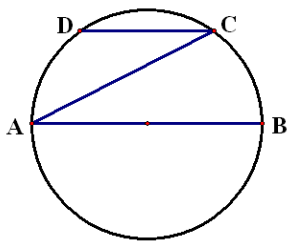


國中數學科試題

選擇題 (共 50 題, 每題 2 分, 共 100 分)

- 二次函數 $f(x) = -x^2 + bx + c$ 滿足 $f(3+t) = f(3-t)$, t 為任意實數, 則下列何者正確?
 ① $f(3) > f(1) > f(5)$ ② $f(6) > f(3) > f(1)$ ③ $f(3) > f(1) > f(6)$ ④ $f(3) > f(6) > f(1)$ 。
- 設 a, b 為實數, 設 $x^3 - ax^2 - bx - 10 = 0$ 有一根 $2+i$, 則此方程式之實根為
 ① -2 ② 2 ③ 1 ④ 此方程式沒有實根。
- 令 A, B 是兩個方陣, 下列敘述何者正確?
 ① $\det(cA) = c \cdot \det(A)$, c 為一個常數 ② $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ ③ $\det(A^T) = \frac{1}{\det(A)}$ 其中 A^T 是 A 的轉置矩陣 ④ 以上皆非。
- 將曲線 $y = \sqrt{x}$, $y=1$ 及直線 $x=4$ 所圍區域對 $y=1$ 做旋轉所得之旋轉體體積為?
 ① $\frac{5}{2}\pi$ ② $\frac{4\pi}{6}$ ③ $\frac{7\pi}{6}$ ④ 2π 。
- 在單獨一回比賽中, 甲、乙兩人各自得勝的機率分別為 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{2}{5}$ 。今在連續五回比賽中, 最先贏得三回者得勝, 則乙得勝之機率為多少?
 ① $\frac{8}{125}$ ② $\frac{162}{625}$ ③ $\frac{648}{3125}$ ④ $\frac{992}{3125}$ 。
- 若 O 為 $\triangle ABC$ 之外心, 且 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 則 H 是 $\triangle ABC$ 之
 ① 重心 ② 內心 ③ 外心 ④ 垂心。
- 如圖, \overline{AB} 為直徑, \overline{AB} 與 \overline{CD} 平行, 且 $\overline{AB} = 50$, $\overline{CD} = t$, $\angle CAB = \theta$, 已知 $\sin \theta = \frac{3}{5}$, 下列敘述何者正確?
 ① t 為質數 ② $t > 15$ ③ $t < 14$ ④ t^2 是被 3 除餘 1 的整數。



- 聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 恰有一組解 $(x, y) = (2, -3)$, 則 $\begin{cases} 3b_1x - 2a_1y = 6c_1 \\ 3b_2x - 2a_2y = 6c_2 \end{cases}$ 之解為
 ① $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ ② $(2, -3)$ ③ $(-3, -6)$ ④ $(-6, -6)$ 。
- 考慮座標空間中三平面 $x+2y-3z=1$, $x+3y-2z=-1$ 及 $x+ay+bz=1$, (a, b 為實數), 則下列敘述何者正確?
 ① 當 $a=1, b=1$ 時, 三平面沒有共同交點 ② 當 $a=4, b=-1$ 時, 三平面恰交於一點 ③ 當 $a=1, b=-4$ 時, 三平面不相交 ④ 當 $a=2, b=-3$ 時, 三平面恰交於一點。
- 橢圓 $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+6)^2}{5} = 1$ 的兩個焦點為 F_1, F_2 , 點 P 在橢圓上, 設 $\overline{PF_1}$ 的中點在此橢圓的短軸上, 則 $\overline{PF_2}$ 的長為
 ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 25。
- 一直角三角形的兩股各為 2 公分、3 公分, 斜邊長為 a 公分, 則下列敘述何者正確?
 ① $3.0 < a < 3.5$ ② $3.5 < a < 4.0$ ③ $4.0 < a < 4.5$ ④ $4.5 < a < 5$ 。
- 下列哪一直線與平面 $2x+3y+z-5=0$ 平行?
 ① $\begin{cases} 2x+y=2 \\ y+z=1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x-y=-7 \\ y+z=11 \end{cases}$ ③ $\frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{-z-8}{1}$ ④ $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{-z-8}{1}$ 。
- 一個骰子連擲 50 次, 六點的次數出現 k 次的機率為 p_k , 當 p_k 為最大時, 則 k 為何?
 ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 以上皆非。
- 估計 $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$ 的值, 則
 ① $S \leq 100$ ② $100 < S < 200$ ③ $200 < S < 300$ ④ $300 < S < 400$ 。
- 以 1、2、3 為元素的 4×3 矩陣共有幾個?
 ① 12^3 ② 3^{12} ③ 3^7 ④ 36。
- 下列各組數據, 何組的標準差最小?
 ① 10, 20, 30, 40, 50 ② 110, 120, 130, 140, 150 ③ 109, 118, 127, 136, 145 ④ 111, 122, 133, 144, 155。

17. 下列哪一個數值最接近 $\sqrt{2}$?

- ① $\sqrt{3} \cos 74^\circ + \sin 74^\circ$ ② $\sqrt{3} \cos 64^\circ + \sin 64^\circ$ ③ $\sqrt{3} \cos 54^\circ + \sin 54^\circ$ ④ $\sqrt{3} \cos 44^\circ + \sin 44^\circ$ 。

18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec x - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = ?$

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\sqrt{2}$

19. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 2}} (1 + \frac{1}{x})^{x+y} = ?$

- ① e ② 0 ③ 1 ④ ∞

20. 令 $\varepsilon = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$ ，行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix} = ?$

- ① -1 ② -3 ③ 0 ④ 1

21. 估算 875^{16} 是幾位數 ($\log 2 = 0.3010300$, $\log 7 = 0.8450980$)

- ① 46 ② 47 ③ 48 ④ 49

22. 下列級數哪一個不收敛?

- ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n})$

23. $11^{104} + 1$ 被 17 除後，餘數是?

- ① 0 ② 3 ③ 7 ④ 11

24. 以十進位表示， $9^9 = (9^9)^9$ 的最後兩位數是?

- ① 89 ② 69 ③ 49 ④ 29

25. 在集合 $\{x^3 + 6x^2 + 3x + 3, x^5 - 5x^3 + 15, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\}$ 中有幾個多項式在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可分解。

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

26. 從 1 到 1000 有多少個整數不是 5、6 或 8 的倍數。

- ① 341 ② 506 ③ 600 ④ 71

27. 將集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 表成 3 個非空子集的聯集，有多少不同的方法。

- ① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4

28. $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ 有多少組非負整數解。

- ① 28 ② 36 ③ 56 ④ 84

29. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集中有偶數個元素的子集共有多少個

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22

30. 設集合 A 有 4 個元素，集合 B 有 3 個元素，則定義在 A 並取值在 B 的函數 $f: A \rightarrow B$ 有多少個?

- ① 48 ② 64 ③ 81 ④ 120

31. 令函數 $y = x + \ln x$ ($x > 0$)，其反函數 $x = x(y)$ 的導函數是

- ① $\frac{3x}{1-2x}$ ② $\frac{x}{1+2x}$ ③ $\frac{x}{x+1}$ ④ $\frac{1}{1-x}$

32. 設 $y^2 + 2 \ln y = x^4$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

- ① $\frac{3x^2 y}{1+2y^2}$ ② $\frac{3x^2 y^2}{1+2y^2}$ ③ $\frac{2x^3 y}{1+y^2}$ ④ $\frac{2xy^3}{1+y^2}$

33. 10^{10} 有多少個相異的正因數?

- ① 121 ② 100 ③ 144 ④ 169

34. 滿足 $\frac{6}{n^2 - 2n}$ 是整數的所有整數 n 的和為何?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

35. 某 50 個正整數的平均值為 4.2，則它們的中位數的最大可能值為何?

- ① 6 ② 6.5 ③ 7 ④ 7.5

36. 函數 $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$ 在區間 $\left[\frac{1}{2}, 4 \right]$ 上的最大值與最小值的差為何?

- ① 1.5 ② 2 ③ 2.5 ④ 3

37. 冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛半徑為何?

- ① ∞ ② 0 ③ 0.5 ④ 1

38. $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ 之值為何？
 ① $e^{\pi} + 1$ ② $e^{\pi} - 1$ ③ $\frac{e^{\pi} + 1}{2}$ ④ $\frac{e^{\pi} - 1}{2}$
39. 下列那一條是複數平面上某橢圓的方程式？
 ① $|z-1|^2 + |z|^2 = 2$ ② $|z-1|^2 - |z|^2 = 2$ ③ $|z-1| + |z| = 2$ ④ $|z-1| - |z| = 2$
40. 某班級學生共有 20 人，其中有兩對學生兄弟，今隨機分為 10 組，每組 2 人。至少有其中一對學生兄弟分配在同一組的機率為何？
 ① $\frac{1}{19}$ ② $\frac{2}{19}$ ③ $\frac{16}{19 \times 17}$ ④ $\frac{33}{19 \times 17}$
41. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，則 $\triangle ABC$ 面積是多少單位？
 ① $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{18} - \sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{18} + \sqrt{3}}{2}$
42. 三次多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 除以 $x^2 + 1$ 得餘式 $2x - 1$ ， $f(x)$ 除以 $2x - 1$ 得餘數 5，求 $a + 2b$ 。
 ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8
43. 考慮方程 $Ax = b$ ，其中 A 為一個二階方陣。當 $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 時，方程有解 $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ；當 $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 時，方程有解 $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 。請問當 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 時，方程的解為何？
 ① $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
44. 下列是關於定義在閉區間 $[a, b]$ ， $a < b$ 上的連續函數 $f(x)$ 的敘述：(A) $f(x)$ 是有上界 (B) $f(x)$ 是有最小值 (C) 對所有 c ， $f(x) = c$ 有解 (D) 只有有限多個點 a ， $f'(a)$ 不存在。錯誤的敘述是那幾項？
 ① 只有(C) ② 只有(D) ③ (A)及(B) ④ (C)及(D)
45. 求所有實數 m 使得方程式 $\sqrt{x-5} = mx + 2$ 有兩相異實根。
 ① $0 < m < 0.1$ ② $-0.5 < m < 0.1$ ③ $-0.1 < m < 0.1$ ④ $-0.5 < m < 0$
46. 三維空間平面 $x + 2y = 5$ 的法向量與直線 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{6}$ 的夾角餘弦值為何？
 ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$
47. 求滿足下列性質的整數 n 的個數：(1) n 除以 3 餘 1 或 n 除以 5 餘 3；(2) $|n| \leq 50$ 。
 ① 46 ② 47 ③ 52 ④ 54
48. 下列關於定義在實數上的實數值可微函數的敘述何者為錯誤？
 ① 若 $f(x)$ 為嚴格遞增，則 $f'(x) > 0$ ② 若 $f'(x) > 0$ ，則 $f(x)$ 為嚴格遞增 ③ 若 $f(x)$ 為嚴格遞增且有界，則 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 存在 ④ 若 $f(x)$ 為嚴格遞增且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 存在，則 $f(x)$ 有界。
49. 複數平面上平行四邊形的四個頂點分別為 $1-i$ ， 3 ， $3+2i$ ， $1+i$ ，那麼它的面積為何？
 ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6
50. 過點 $(5, 1)$ 對圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 的兩切線切圓於點 A 、 B 。求 \overline{AB} 。
 ① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ 4

【試題結束】