

台北市立中正高級中學 101 學年度第 2 次專任教師甄選數學科試卷

一、填充題：(每題五分)

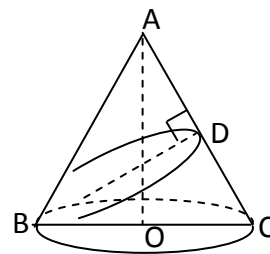
1. 設 $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$, 且 $p+q+r=1$, 求滿足 $x=p+3q+4r$, $y=2p+q+3r$ 之點 (x, y) 所形成區域面積為_____

2. 投擲骰子四次依次得 a, b, c, d , 則使二拋物線 $y=2x^2+2ax+b$ 與 $y=x^2+2cx+d$ 不相交的機率為_____

3. 設 $f(x)$ 為一正值函數, 任意實數 x, y 滿足 $f(x+y)=2f(x)f(y)$, $f'(0)=2$, 則 $\frac{f'(x)}{f(x)} =$ _____

4. 若 $\sum_{k=1}^{2012} k(C_k^{2012})^2 = 2012 \cdot C_n^m$, 求數對 $(m, n) =$ _____

5. 如圖, 直圓錐頂點為 A , \overline{BC} 為底面的直徑, O 為圓心, $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 4$, 若 \overline{AC} 的垂直平分面過 D 點截圓錐得一截痕, 則此截痕圖形正焦弦長為_____.



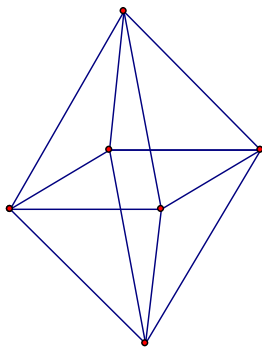
6. 若圓錐曲線方程式為 $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0$, 求此圓錐曲線的焦點坐標為_____

7. $1+2(1+3)+3(1+3+6)+4(1+3+6+10)+\dots+17(1+3+6+\dots+153) =$ _____

8. 將 6 個 A, 6 個 B 及 6 個 C 共 18 個字母排成一列, 使得前 6 個字母沒有 A, 中間 6 個字母沒有 B, 最後 6 個字母沒有 C, 試問共有多少種排列方式? _____

9. 若 $a, b, x, y \in R$, $\begin{cases} a+b=4 \\ ax+by=13 \\ ax^2+by^2=41 \\ ax^3+by^3=127 \end{cases}$, 求 $ax^4+by^4 =$ _____

10. 下圖為一個正八面體。一隻螞蟻自正八面體上方的頂點出發, 沿著正八面體的稜邊爬行。在每個頂點處牠會從四條稜邊中隨機地選擇一條向另一頂點前進, 直到抵達下方的頂點為止。則螞蟻自上方頂點爬行到下方頂點, 所經過的稜邊數的期望值為_____



二、計算題：(1~5 題每題 8 分，第 6 題 10 分)

- $k \in \mathbb{R}$ ，若方程式 $4x^3 + 12x^2 + kx + 4 = 0$ 有三個相異實根，求 k 的範圍？
- 平面上有一線段 $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ，動點 M, N 滿足 $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB} = 1$ 。將 $\triangle AMB$ 與 $\triangle MNB$ 的面積記為 S 與 T ，試求 $S^2 + T^2$ 最大值？
- 令 $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{729}}$ ，若 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數，求 $[S] = ?$
- 求 $\tan \frac{\pi}{7} \square \tan \frac{2\pi}{7} \square \tan \frac{3\pi}{7} \square \tan \frac{4\pi}{7} \square \tan \frac{5\pi}{7} \square \tan \frac{6\pi}{7} = ?$
- 有兩個數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ ，已知 $a_1 = 1$ ， $b_1 = -1$ ，且 $a_{n+1} = 2a_n - b_n$ ， $b_{n+1} = 2b_n$ (其中 $n = 1, 2, 3, \dots$)，求 a_{100} 與 b_{100} 。
- (1) 假設 $\int_{x-1}^x f(t) dt = x^4$ ，則 $f(x)$ 為何？(2) 請利用(1)的結論，求 $\sum_{k=1}^n k^4$ 的值為何？(以 n 表示之)

臺北市立中正高級中學 101 學年度第 2 次專任教師甄試數學科填充題答案

一、填充題：(每格 5 分，共 50 分)

1. $\frac{5}{2}$	2. $\frac{11}{72}$	3. 4	4. (4023, 2011) (4023, 2012)	5. $\frac{4}{\sqrt{3}}$
6. $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2}) (\frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$	7. 66861	8. 15184	9. 389	10. 6