

國立陽明高中 101 學年度第一次教師甄選試題—數學科

一、 選擇題：每題 8 分，共 32 分。

計分說明：每題至少有一個選項是正確的，答錯任一個選項得 0 分，全對得 8 分。

(ACE) 1. 下列選項何者正確？

(A) 函數 $f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(1-x)(2-x)(3-x)}$ ，則 $f(x)$ 在 $x=0$ 處的導數為 1

(B) 設 $f(x)$ 為可微分的函數，且 $f'(2) = f(2) = 5$ ，則 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x^2) - f(2)}{x^2 - 2} = 10$

(C) 兩曲線 $y = x^3 - 3x$ ， $y = x^3 - 3x + 32$ ，其公切線方程式為 $9x - y + 16 = 0$

(D) 函數 $f(x) = x[x]$ 在 $x=0$ 時可微分

(E) 函數 $f(x) = x|x|$ 為一可微分函數。

(CD) 2. 已知 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ 且 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 組成等差數列， n 為

正偶數，又 $f(1) = n^2$ ， $f(-1) = n$ ，則下列選項何者正確？

(A) $d = 1$

(B) $a_1 = 2$

(C) $a_n = 2n - 1$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2}$

(E) $f(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 的餘式為 $\frac{n^2 - n}{2}x + n^2$ 。

(ACE) 3. 設有一組 19 項資料，由小而大排列為 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_9, x_{10}, x_{11}, \cdots, x_{19}$ ，且

$M = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{19} x_i$ 。若已知 $x_{10} \leq M \leq k \leq x_{11}$ ， $a = \sum_{i=1}^{19} |x_i - M|$ ， $b = \sum_{i=1}^{19} |x_i - k|$ ，

$c = \sum_{i=1}^{19} |x_i - x_{11}|$ ， $p = \sum_{i=1}^{19} (x_i - M)^2$ ， $q = \sum_{i=1}^{19} (x_i - k)^2$ ， $t = \sum_{i=1}^{19} (x_i - x_{11})^2$ ，則下列哪些

選項是正確的？

(A) $\sum_{i=1}^{19} (x_i - M) = 0$ (B) $a \geq b \geq c$ (C) $a \leq b \leq c$ (D) $p \geq q \geq t$ (E) $p \leq q \leq t$ 。

(BCD) 4. 某班 8 位學生的國文與英文成績列表如下：

學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	平均
國文(X)	88	80	73	80	50	64	69	80	73
英文(Y)	80	72	69	70	67	60	60	74	69

假設國文成績的標準差為 S_x ，英文成績的標準差為 S_y ，兩者的相關係數為 r ，

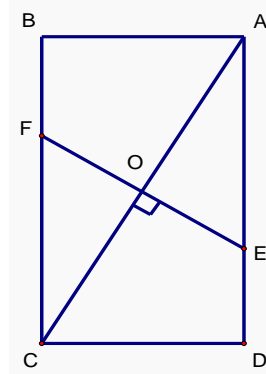
英文對於國文的迴歸直線為 L 。試問下列哪些敘述是正確的？

- (A) 若只將丙成績刪除，則其餘 7 位學生新的國文成績標準差亦為 S_x
- (B) 若只將戊成績刪除，則其餘 7 位學生的國文與英文的相關係數大於 r
- (C) 若將每位學生的國文與英文成績互換(即：甲國文變為 80，英文變為 88；乙國文變為 72，英文變為 80；...)，則互換後國文與英文的相關係數亦為 r
- (D) 若將每位學生的國文加 5 分，英文減 5 分，則調分後新的『英文對於國文的迴歸直線斜率』與 L 斜率相同
- (E) 若將每位學生的國文加 5 分，英文減 5 分，則調分後新的『英文對於國文的迴歸直線』亦為 L 。

二、填充題：每「題」6分，共 54 分。

1. 如下圖所示，在矩形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ ，過 \overline{AC} 的中點 O 作 $\overline{EF} \perp \overline{AC}$ 交 \overline{AD} 於 E 、交 \overline{BC} 於 F ，將平面 $ABFE$ 沿 \overline{EF} 摺起，使得平面 $ABFE$ 垂直平面 $CDEF$ ，求此時

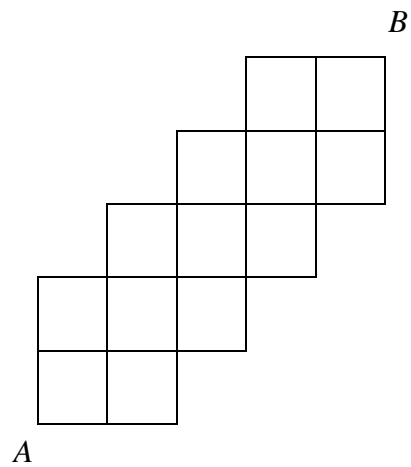
$$\cos \angle BFC = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{1}{4} \underline{\hspace{2cm}}。$$



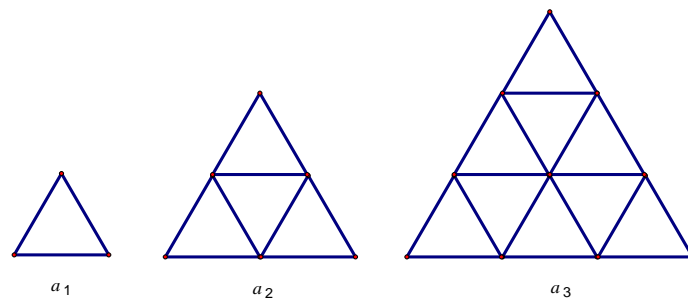
2. 令 $f(x) = ||x|-1| - ||x|-2| + ||x|-3| - ||x|-4| \cdots + ||x|-11|$ ，試求 $\int_0^{10} f(x)dx$ 之值為 55。

3. 設 x, y, z 均為正數，且 $36x + 9y + 4z = 49$ ，求 $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y+7} + \sqrt[3]{z+26}$ 的最大值為 6。

4. 如下附圖，在棋盤格街道走法中，取走捷徑的情況下，從左下角的 A 走到右上角的 B ，途中恰轉彎五次，則總走法數為 42。



5. 如下圖，由邊長為 1 的正三角形堆疊 n 層，試問邊長為 6 時(即 a_6)，所有大大小小之平行四邊形總數為 210。



6. 甲、乙、丙、丁、戊五位男生一起參加舞會，正巧遇到四位女性朋友，第一支舞先由乙、丙、丁、戊四位男生各邀一位女伴共舞(即甲沒舞伴)，第二支舞五位男生商議以抽籤決定女伴，但規定每位男生都不可以跟第一支舞相同舞伴(若相同則重抽)，請問：第二支舞甲又沒有抽中舞伴的機率為何 $\frac{9}{53}$ 。

7. 下表為某冷飲店的價目表，王老師前往買飲料時正巧遇到「買五送一」活動，即一次帶走六杯，價錢最低的其中一杯免費；若王老師花了 110 元買了六杯飲料(買五送一)，請問這六杯飲料的口味有 62 不同的選擇。

每杯 20 元		每杯 25 元				每杯 30 元	
綠 茶	紅 茶	芋香 奶茶	梅子 綠茶	杏仁 奶茶	布丁 奶茶	珍珠椰果 綠茶	珍珠椰果 奶茶

8. 兩個二次函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ ，若 $g(x) = -f(100-x)$ 且函數 $g(x)$ 的圖形包含函數 $f(x)$ 圖形的頂點。兩個函數圖形與 x 軸交點的 x 坐標按照遞增依序為 x_1 、 x_2 、 x_3 及 x_4 ，且 $x_3 - x_2 = 150$ 。設 $x_4 - x_1 = p + q\sqrt{r}$ ，其中 p 、 q 及 r 均為正整數，且 r 不能被任何質數的平方整除。試求 $p - q - r =$ 148。

9. 設 \overline{AB} 為圓 $x^2 + y^2 = 37$ 的一弦，若點 $P(1,2)$ 在 \overline{AB} 上，且為 \overline{AB} 的三等分點之一，試求直線 AB 的方程式 $3x - 4y + 5 = 0$ 或 $x = 1$ 。

三、計算說明題：每題 7 分，共 14 分。

1. 有 5 種不同的果汁倒入 3 個杯子，每杯限倒一種，

(一) 試求下列情況各有幾種倒法：

- (1) 杯子相同，每種果汁限倒一次。
- (2) 杯子不同，每種果汁限倒一次。
- (3) 杯子相同，每種果汁無限供應。
- (4) 杯子不同，每種果汁無限供應。

(二) 學生對於上述四題解法，經常混淆不清，上課時如何解說較適當？請說明。

略

2. 請說明兩雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 與 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4$ 的圖形之間有何關係？請證明你的說法。

略