國立臺中第二高級中學101學年度第一次教師甄選 數學科試題

請填寫准考證號碼 ______________

一、填充題：每格5分，共40分。

1.平面上，給定一正六邊形，已知六個頂點中有兩個爲雙曲線Γ的焦點，另外四個頂點在Γ上，則Γ兩條漸近線銳夾角的餘弦值爲________。

2.已知複數 $z_1 = x+\sqrt{5}+yi$ ， $z_2 = x-\sqrt{5}+yi$ ， $x,y\in R$ 且 $|z_1|+|z_2|=6$ ，則 $f(x,y)=|2x-3y-12|$ 的最大值爲__________。

3.設有兩個不同的箱子, 每個箱子中都有一些紅球與白球而且每個顏色都至少有一個。假設我們隨機選一個箱子再選一個紅球的機率與把這兩個箱子球倒在一起之後選出一個紅球的機率是相等的。若第一個箱子有7個球, 第二個箱子有5個紅球。試求第二個箱子共有幾個球__________。

4.長寬分別爲4,3的長方形 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{AC}$ 摺成 90° 的二面角(即平面ABC與平面ACD夾 90°),求空間中 B 和 D 的距離___。

5.若函數 $f(x)=x^3+x$ 和 $g(x)=x^3+x+k$ 有公切線，若此公切線斜率大於7，求 k 範圍__________。

6.求拋物線 $y=-x^2+2x$ 與直線 $y=-x$ 的圖形所圍成之封閉區域繞 x 軸旋轉一圈所得之旋轉體的體積__________。

7.給定空間中6點，其中任四點不共面，則至多有______個相異的平面恰與其中四點等距。

8.若干個正整數之和爲2012，試求它們乘積的最大值__________。(以指數表示，不必乘開)

二、計算題：每題10分，共60分。(可不用照題號順序寫，但請務必清楚標明題號，並詳細填寫計算證明過程)

1. 一隻螞蟻正保持在一個正四面體的某一個頂點A之上，此時它隨機選擇一個鄰近的頂點(每個鄰近的頂點被選中的機率皆爲1/3)，並且在一分鐘之後走到那裡；接著它又隨機選擇一個鄰近的頂點，並在一分鐘之後走到那裡。假設這隻螞蟻一直以上述的方式在各個頂點之間走動，那麼恰在30分鐘後，它的位置恰好在一開始起步之頂點A的機率是多少呢？
(以指數表示，不必乘開)

2.給一個正整數 n, 找出所有多項式 $f(x)$ 滿足 $f(0)=1$ 且 $[f(x)]^2+4x^{n+1}=[g(x)]^2+4x^n$, 其中 $g(x)$ 爲某個多項式。

3. 給定 $x_1=2$ ， $y_1=3$ ， $z_1=5$ ， $x_{n+1}=\dfrac{y_n+z_n}{2}$ ， $y_{n+1}=\dfrac{x_n+z_n}{2}$ ， $z_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ ， $n\in N$ ，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 之值。

4.設 a,b,c 分別爲三角形之三邊長，證 $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ，並求等號成立之條件。

5. 設兩變數 X,Y 的 n 組資料爲 $(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,n$ ，且算術平均數分別爲 $\bar{x}$ 與 $\bar{y}$ ，利用最小平方方法求得的迴歸直線爲 $\hat{y}=a+bx$ 。設變數 $\hat{Y}$ 的資料爲 $\hat{y}_i=a+bx_i$ ，變數 $E=Y-\hat{Y}$ 的資料爲 $e_i=y_i-\hat{y}_i$ ，試證： $\sum\limits_{i=1}^{n}e_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{y}_ie_i=0$ 。

6.證明空間中，由三個向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ， $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 與 $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 所張出之平行六面體的體積 $V=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$ 。

(需寫出空間中兩向量形成平行四邊形面積等詳細證明)