

## 國立板橋高級中學 101 學年度教師甄試 數學科試題

1. 四面體  $O-ABC$  中,  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$  兩兩垂直,  $P$  為內部一點。

(1) 若  $P$  到  $OBC, OAC, OAB$  的三距離分別為 4, 5, 6, 求  $\overline{OP}$ 。

(2) 若  $P$  到  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$  的三距離分別為 4, 5, 6, 求  $\overline{OP}$ 。

(3)  $\overrightarrow{OP}$  和  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  分別夾  $45^\circ$  和  $60^\circ$  角。求  $\overrightarrow{OP}$  和  $\overrightarrow{OC}$  的夾角。

2. 市佔率轉移矩陣  $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ ,  $P^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 。(1) 求  $P^{(2)}$  (2) 求  $P^{(n)}$  (3) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$ 。

3. 曲線  $\Gamma: y = \frac{1}{x}$ ,

(1)  $\triangle ABC$  三頂點皆在曲線  $\Gamma$  上, 求證其垂心亦在曲線  $\Gamma$  上。

(2)  $D = (-1, -1)$ ,  $\triangle BCD$  為正三角形, 且  $B, C$  在第一象限曲線  $\Gamma$  上。求  $B, C$  坐標。

4. (1)  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 9} + \sqrt{-x^2 + 68x - 256}$ , 求  $f(x)$  的最大值。

(2) 承上, 此時  $x$  之值。

5.  $\langle x_n \rangle$  正實數數列,  $x_1 = \frac{3}{4}$  且滿足  $x_{k+1}^2 = x_k^4 + 2x_k^3 + x_k^2$ , 求  $\left[ \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_{202}+1} \right]$ 。

6. 40 個人匿名投票, 三位候選人, 每人一張票, 至多可投二人, 已知無廢票。

(1) 若每人都投兩人, 有幾種不同的開票結果。

(2) 若每人可能投兩人也可能投一人, 有幾種不同的開票結果。

(3) 承 (1), 且至少有一位候選人票數不多於 10 票。

7. (1) 求  $\begin{vmatrix} 10 & 9 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 9 & \dots & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & 1 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 9 & \vdots \\ 8 & \dots & \dots & \dots & 1 & 10 & 9 \\ 9 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 10 \end{vmatrix}$  (2)  $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ , 求  $\begin{vmatrix} x^9 & x^8 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & x^9 & x^8 & \dots & \dots & \dots & x \\ x & 1 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & x^8 & \vdots \\ x^7 & \dots & \dots & \dots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^8 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & x^9 \end{vmatrix}$ 。

8.  $f(x) = C_{n-1}^n x^{n-2} + C_{n-2}^n x^{n-3} + \dots + C_2^n x + C_1^n$ ,  $f(x) = 0$  有重根, 且  $66 \leq n \leq 2012$ , 求滿足以上條件  $n$  之總和。  
(66 是不確定的數字?)
9. 證明或舉出反例:  $f(x)$  為多項式, 且  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 3$ , 則  $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 4$ 。
10. 求所有的正實數  $x, y$ , 滿足  $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}, \frac{2xy}{x+y}$  皆為正整數且四數之和為 66。

感謝 lianger 幫忙修正題意和題號, 寸絲@2012.05.19