國立臺灣師大附中 101 學年度教師甄試 數學科試題

一. 填充題 (每題 6 分，共 36 分)

1. 已知直線 L 過點 $P(-2,1,2)$ 且與兩條直線 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ 及 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{1}$ 都相交，則 L 的方程式為 ____________。 (以對稱比例式表示)

2. 設 D 為 $\triangle ABC$ 內一點使得 $\angle ACD=\angle ABD$，且 $\angle ADB=90°$， M 為 $\overline{BC}$ 的中點。已知 $\overline{AB}=12$， $\overline{AC}=8$ ，則 $\overline{DM}=$ ____________。

3. 設函數 $f(x)$ 在區間 $[0,1]$ 上連續，已知 $\int_0^1 f(x)dx=k$，則 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$ 的積分值為 ____________。 (以 k 表示)

4. 設曲線 C 由 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{10}=1\ (y\geq 0)$ 與 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{10}=1\ (y\geq 0)$ 所組成，若直線 L 過點 $(0,3)$ 且與曲線 C 恰相交於 2 點，則直線 L 的斜率範圍為 ____________。

5. 若 a 是下列同餘方程組

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 9 \end{cases}$$

的最小正整數解，則 $a=$ ____________。

6. 設 R^3 中直線 L 過 $(0,0,0)$ 及 $(1,-1,1)$ 兩點，且 T 是以直線 L 為軸，逆時針旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ 的變換 (從向量 $(1,-1,1)$ 的端點 $(1,-1,1)$ 往原點的方向看)，則向量 $(1,2,3)$ 經過此旋轉變換後所得的向量為 ____________。

二. 計算證明題 (除第 3 題兩小題各 5 分外，其它每題 9 分，共 64 分)

1. $a>0$, $b>0$, θ 銳角，求 $\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}$ 的最小值。

2. $\triangle ABC$ 中， G 爲重心。直線 L 過 G 與 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 分別交於 M 和 N。$\overline{BM}=p\overline{BA}$, $\overline{BN}=q\overline{BC}$，求 pq 最小值。

3. $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$, for $n\ge 1$。

   (1) 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。

   (2) 證明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收斂。

4. $A_{n\times n}=[a_{ij}]$, $B_{n\times n}=[b_{ij}]$，其中 $b_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}-a_{ij}$。$\det A=a$, 求 $\det B$ (以 a 表示)。

5. 求 $\sum\limits_{n=1}^{10}\left[\frac{x}{n!}\right]=2012$ 的所有正整數解。

6. 求兩小於 1 的正數，其和小於 1，其積小於 $\frac{2}{9}$ 的機率。

7. $P(a,b)$ 在 $x^2+y^2=5$ 上，求滿足 $\log_2(b-a)-\log_8(3b-5a)=0$ 的所有點 P。

typed in latex by 寸絲@2012.05.15