2012年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題

2012年2月11日

說明: 將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號處。

答錯不倒扣, 未完全答對者, 不給分。

一、(7分) 已知 $\triangle ABC$ 爲直角三角形, 其中 $\angle C = 90°$, $\overline{BC} = 5$, 另兩邊 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 的長度均爲正整數。延長 $\overline{AC}$ 到 D, 使得 $\angle ABD = 90°$. 則 $\triangle ABD$ 的外接圓半徑 $R = \underline{①②③/④⑤}$ (化成最簡分數)。Ans. 169/24.

二、(7分) 將 $2n$ 個正整數 $1, 2 \cdots, 2n$ 任意放置在一個圓周上。已知, 在所有相鄰的三個數中, 三個數全爲奇數的有 a 組, 三個數恰有兩個爲奇數的有 b 組, 三個數中只有一個爲奇數的有 c 組, 三個數都是偶數的有 d 組。若 $a \neq d$, 則 $\frac{b-c}{a-d} = \underline{⑥⑦}$。Ans. -3

三、(7分) 已知半徑分別爲 10 與 5 的兩個圓外切於點 P。試問: 點 P 到這兩個圓的一條外公切線的距離 $d = \underline{⑧⑨/⑩}$ (化成最簡分數)。Ans. $20/3$

四、對所有兩兩相異的 n 個正整數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 則在形如 $t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n$ (其中 t_i 爲 1 或 -1, $i = 1, 2, \cdots, n$) 的整數中, 必存在 S_n 個不同的整數。試問

(1) (2分) $S_{10} = \underline{⑪⑫}$ Ans. 56

(2) (5分) $S_{100} = \underline{⑬⑭⑮⑯}$ Ans. 5051

五、已知二元多項式 $f(x, y)$, 滿足下列條件

(i) 對任意實數 x, $f(x, 0) = 1$,

(ii) 對任意實數 x, y, z, $f(f(x, y), z) = f(z, xy) + z$.

試問

(1) (2分) $f(2012, 1) = \underline{⑰⑱⑲⑳}$ Ans. 2013

(2) (5分) $f(2012, 2) = \underline{㉑㉒㉓㉔}$ Ans. 4025