四邊形的面積

蔡聰明

一．問題的提出

給一個三角形, 已知三邊長, 那麼它的面積可用著名的 Heron 公式來求算。這我們在“談 Heron 公式: 記一段教學經驗”一文中, 已經有所敘述[1]。現在要加以推廣, 我們自然想到了兩個方向: (i) 維數的提高, 從平面問題變成空間問題; (ii) 邊數的增加, 從三角形變成四邊形乃至更多邊形。本文僅限於討論推廣到四邊形的情形。

問題: 已知四邊形的四邊 a, b, c, d, 有無類似於 Heron 的面積公式?

在文獻上, 這已經有 Brahmagupta 公式 (628年, 印度數學家) 及 Bretschneider 公式 (1842 年)。不過本文關切的核心問題是: 追尋、思考的過程, 亦即如何猜測出公式? 最好是能“合理地”看出來。我們希望達到這樣的目標: 給我“洞悟的眼光” (insight), 不要只給我“邏輯與數字”。這是面對數學時, 一個基本而謙卑的願望。

不論是三角形或四邊形, 關於邊、角、對角線及面積之間的關係, 有兩個重要的結果: 一個是邊、角、對角線的關係式, 例如畢氏定理 (商高定理)、餘弦定理與 Ptolemy 定理; 另一個是面積表成邊、角或對角線之公式, 例如 Heron 公式, Brahmagupta 公式與 Bretschneider 公式。這些定理與公式的關係非常密切, 具有一體兩面的偶件關連, 簡直是屬於同一家族, 因此我們要一併加以討論。它們可以說是古典三角學、平面幾何學中美麗的珍珠, 令人流連玩味不忍釋手。事實上, 幾何學的向量代數化就是以這些素材作爲思考的動機與出發點。對於高中生來說, 這是一個鍛練思考的好論題。

二．三角形的溫故知新

最著名而熟知的是關於直角三角形的結果:

畢氏定理:$\angle C = 90^\circ \iff c^2 = a^2 + b^2$

面積公式:$S = \frac{1}{2}ab$, 參見下圖1。

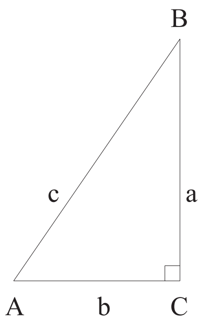


圖 1

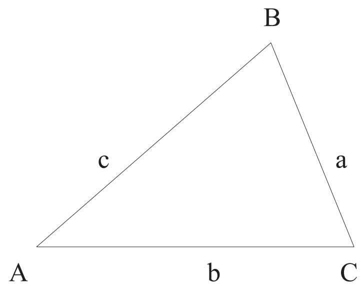


圖 2

註: 畢氏定理在文獻上有 370 種證法 [5]。

接著飛躍到一般三角形, 此時比較豐富多彩。畢氏定理推廣成

餘弦定理:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \quad \text{(邊、角關係)} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases} \tag{1}$$

面積公式:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2}ca\sin B \end{aligned} \tag{2}$$

或

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ (Heron 公式)} \tag{3}$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$。

如何直觀地猜出 Heron 公式的討論請參見 [1]。上述 (3) 式的證明, 只不過是 (1)、(2) 兩式的簡單應用:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ca\sin B \qquad \text{(由(2) 式)} \\ 16S^2 &= 4a^2c^2\sin^2 B \\ &= 4a^2c^2(1-\cos^2 B) \\ &= 4a^2c^2[1-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac})^2] \\ &\qquad \text{(由(1) 式)} \\ &= 4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2 \\ \text{令 } s &= \frac{1}{2}(a+b+c), \text{ 則} \\ S^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c), \text{ 證畢。} \end{aligned}$$

三 . 推廣到圓內接四邊形

四邊形這一國比三角形國還要靈敏、詭譎 (delicate, subtle)。最顯著的是四邊形沒有穩固性: 已知四邊 a, b, c, d, 並沒有唯一決定一個四邊形 (採用全等觀點), 它還是可以壓縮、作邊的置換而變形。例如長方形可以作各種變形 (四邊保持不變):

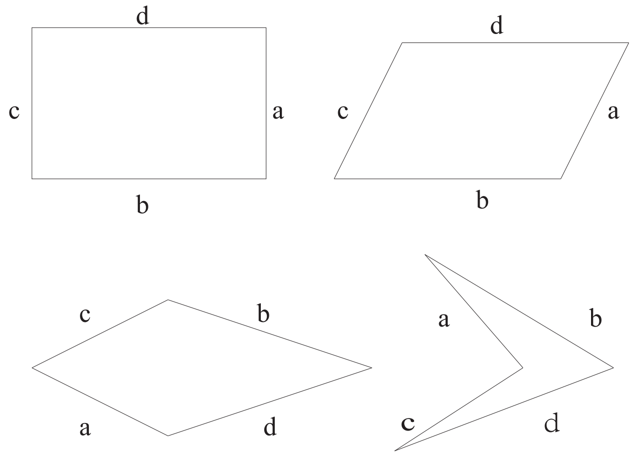


圖 3

這四個四邊形都不全等, 並且面積都不同。

問1. 已知四邊形四邊為 a, b, c, d,

(i) 邊、角、對角線有何關係?

(ii) 面積如何表成邊、角或對角線?

按數學思考的常理, 我們先退到特例, 再逐步尋幽探徑, 前進到一般情形。什麼是四邊形的簡單特例呢? 我們很自然地想到了長方形:

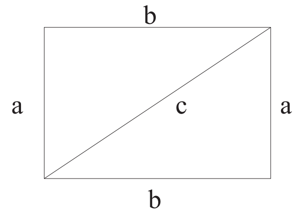


圖 4

它由兩個相同的直角三角形 a, b, c 湊在一起, 因此邊與對角線的關係仍然只是畢氏定理: $c^2 = a^2 + b^2$, 並且面積 $S = ab$。這些都沒有新義。

如何“化腐朽爲神奇”呢?

如果我們將上述長方形的邊作置換成鳶形:

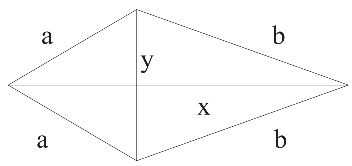


圖 5

那麼面積 $S = \frac{1}{2}xy$; 但是邊與對角線的關係仍然不易看出來。事實上, 鳶形可以在四邊保持不變之下, 作壓縮或拉伸, 讓對角線 x, y 變動。因此還是有點滑溜不易把捉的感覺。我們知道任何三角形必可內接於一個圓之中, 四邊形則不然。

我們稍退一步: 考慮圓內接矩形與鳶形

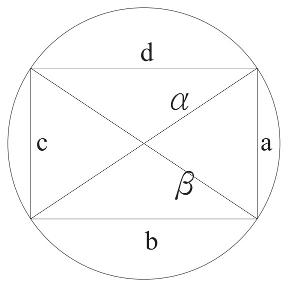


圖6

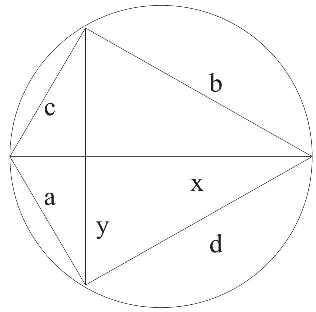


圖 7

圖7 鳶形的面積爲

$$S = \frac{1}{2}xy$$

而邊與對角線的關係是什麼呢?

顯然圖6的矩形與圖7 的鳶形具有相同的面積 (以圓心連接四頂點立知), 故

$$\frac{1}{2}xy = ab$$

因爲 $a = c$, $b = c$, 所以

$$xy = 2ab = ab + cd \tag{4}$$

亦即兩對角線的乘積等於兩對邊乘積之和。這就是圓內接鳶形的邊與對角線的關係式。以這個公式來觀看圖6, 我們發現

$$\alpha\beta = ac + bd \tag{5}$$

也成立, 因爲 (5) 式不過是畢氏定理

$$\alpha^2 = a^2 + b^2$$

之“兩元化”或 “兩儀化”(因爲 $\alpha = \beta$, $a = c$, $b = d$)。因此 (4) 式可以看作是畢氏定理的一種推廣。

上述結果啓示我們猜測: 圓的任意內接四邊形, 其邊與對角線具有 $xy = ac + bd$ 的關係, 參見下面圖8。

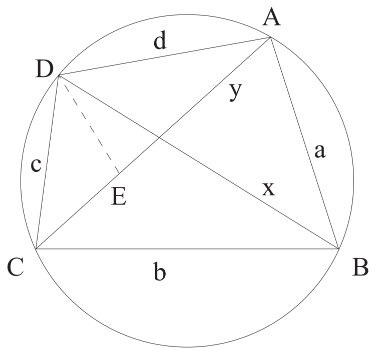


圖 8

事實上, 我們可以證明這個猜測, 而且不難。過 D 點作一直線交 AB 於 E 點, 使得 $\angle CDE = \angle BDA$。於是容易看出

$$\triangle CDE \sim \triangle BDA \text{ 並且 } \triangle ADE \sim \triangle BDC$$

從而

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CE}{AB}, \quad \frac{BC}{AE} = \frac{BD}{AD}$$

於是

$$\begin{aligned} CD \cdot AB &= BD \cdot CE \\ AD \cdot BC &= AE \cdot BD \end{aligned}$$

兩式相加得

$$\begin{aligned} CD \cdot AB + AD \cdot BC &= BD(AE + CE) \\ &= BD \cdot AC \end{aligned}$$

亦即

$$ac + bd = xy. \tag{6}$$

證畢。因此, 我們得到:

定理1: (Ptolemy, 150 年) 設 $ABCD$ 爲圓內接四邊形, 四邊分別爲 a, b, c, d, 對角線爲 x, y, 則 $xy = ac + bd$。

這個結果精巧美妙, 又是畢氏定理的推廣。天文學家 Ptolemy (90-168年) 利用它做出歷史上第一張弦函數表。他對天文學非常狂熱, 他說過: "渺小平凡的我, 本應如蜉蝣一般朝生暮死。但是每當我見到滿天繁星在空中依照自己的軌道井然有序地運行時, 就情不自禁有身在天上人間之感, 好像是天神宙斯 (Zeus) 親自饗我以神饌。" 眞是令人感動。

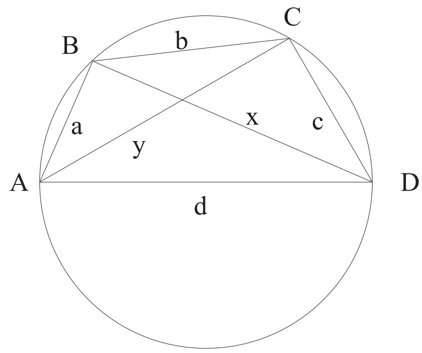


圖 9

去年 (1992年) 大學聯考自然組有一考題如下: 在圖 9 中, AD 爲圓之直徑, B, C 爲半圓周上兩點。$a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = AD$, 試證 d 爲方程式 $x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$ 之一根。

這當然有種種證法, 但是利用 Ptolemy 定理配合畢氏定理的做法是最簡潔漂亮的。令 $x = BD$, $y = AC$, 則

$$xy = ac + bd$$

$$\begin{aligned} x^2 &= d^2-a^2 \\ y^2 &= d^2-c^2 \end{aligned}$$

於是

$$(d^2-a^2)(d^2-c^2)=x^2y^2=(ac+bd)^2$$

展開、化簡得

$$d^3-(a^2+b^2+c^2)d-2abc=0$$

這就得證了。

根據筆者閱卷的經驗, 沒有看到考生採用上述證法。答對的考生多半是採用: 作補助線與餘弦定理來做, 較煩瑣。

接著我們探尋圓內接四邊形的面積公式, 仍然參考圖 8。首先觀察到, 面積由四邊 a, b, c, d 唯一決定。四邊形的邊作置換可能影響全等, 但並不影響面積。因此圓內接四邊形的面積理應有對應的 Heron 公式, 我們令其面積爲 $S(a,b,c,d)$。

問 2. $S(a,b,c,d)=?$

我們進一步觀察到 $S(a,b,c,d)$ 具有下列性質:

(i) $S(a,b,c,d)$ 的量綱 (dimension) 爲 L^2 (即長度的平方),

(ii) 邊界條件: 當 $a+b+c=d$ 或 $b+c+d=a$ 或 $c+d+a=b$ 或 $d+a+b=c$ 時, $S(a,b,c,d)=0$, 故由因式定理知 $S(a,b,c,d)$ 有 $(a+b+c-a)$, $(b+c+d-a)$, $(c+d+a-b)$ 與 $(d+a+b-c)$ 之因子。四者乘起來, 量綱爲 L^4。

根據這兩條線索, 啓示我們提出下面的猜測:

$$\begin{aligned} S^2 = {} & K(a+b+c-d)(b+c+d-a)\cdot \\ & (c+d+a-b)(d+a+b-c) \end{aligned}$$

其中 K 是待定常數。以正方形之特例代入上式, 立即求得 $K=\frac{1}{16}$。於是我們的猜測完全明朗:

$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \quad (7)$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$。

這是我們所要的答案嗎? 我們試驗長方形, 發現 (7) 式成立。對於 $d=0$ 之特例, 四邊形變成三角形, 而 (7) 式變成 Heron 公式。因此, 在還沒有證明之前, 我們已經有了相當的理由相信 (7) 式就是圓內接四邊形的面積公式。

否證或證明, 要走哪一條路? 讓我們嘗試證明吧。仍然參見圖 8。四邊形的面積

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC+\triangle ACD \\ &= \frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D \\ 4S &= 2ab\sin B+2cd\sin D \quad (8) \end{aligned}$$

由餘弦定律知

$$\begin{aligned} & a^2+b^2-2ad\cos B \\ = {} & y^2=c^2+d^2-2cd\cos D \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & a^2+b^2-c^2-d^2 \\ = {} & 2ab\cos B-2cd\cos D \quad (9) \end{aligned}$$

將 (8), (9) 兩式平方相加得

$$16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$

$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(B+D) \ (10)$$

因為 $B + D = 180°$, $\cos(B + D) = -1$, 故得

$$16S^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = (2ab+2cd)^2$$

從而

$$\begin{aligned}16S^2 &= (2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2\\ &= [(a+b)^2-(c-d)^2]\cdot\\ &\quad [(c+d)^2-(a-b)^2]\\ &= (a+b+c-d)(a+b-c+d)\\ &\quad (c+d+a-b)(c+d-a+b)\end{aligned}$$

令 $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, 則得

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

我們的猜測得證。

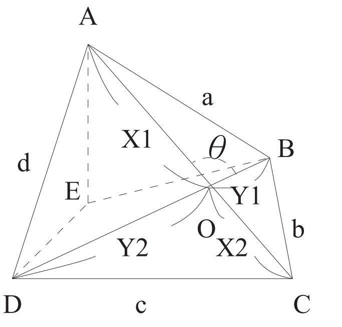
定理2:(Brahmagupta,628年) 設$ABCD$為圓內接四邊形, 四邊為 a, b, c, d, 則其面積為

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}。 \tag{10}$$

註. Brahmagupta 誤以為此公式適用於任何四邊形。事實上, Heron 已指出一般四邊形無法由其四邊唯一決定。

四 . 一般四邊形

一般四邊形$ABCD$可分成凸四邊形 (convex quadrilateral), 如下圖 10, 以及凹四邊形, 如下圖 11。



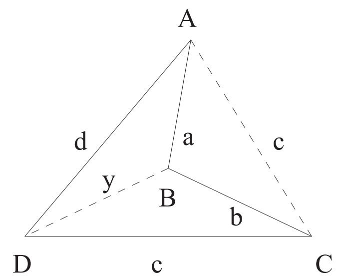


圖 10

圖 11

我們先討論凸四邊形的情形。如圖 10, 設 $ABCD$ 為一個凸四邊形, 並且

$$\begin{aligned}AB &= a, BC = b, CD = c, DA = d\\ AC &= x, BD = y,\\ &\quad s = \frac{1}{2}(a+b+c+d),\\ &\quad S = ABCD \text{ 的面積。}\end{aligned}$$

我們要研究的論題仍然是問 1, 首先探討四邊 a, b, c, d 與對角線 x, y 的關係。對於圓內接四邊形的情形, Ptolemy 定理告訴我們: $xy = ac + bd$。但是對於一般凸四邊形, 如何呢?

將圓內接四邊形稍作壓縮, 四邊保持不變, 即 $ac + bd$ 不變, 但是對角線 x 與 y 卻一個變長, 另一個變短 , 記為 x_0 與 y_0。那

麼 x_0y_0 與 xy 何者較大呢? 似乎不容易看出來, 眞理藏得比較深了 (但是我們相信有眞理可尋)。下面我們要採用所謂的"探索性的演繹法", 模仿原先 Ptolemy 定理的證明方法, 試試看會得到什麼結論。

回到圖 10 之一般凸四邊形。作出點 E, 使得

$$\angle DAE = \angle CAB \quad 且 \quad \angle ADE = \angle ACB$$

於是 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 故

$$\frac{AD}{ED} = \frac{AC}{BC}, \quad 即 \quad bd = x \cdot ED \quad (11)$$

另外也有

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}, \quad 並且 \quad \angle DAC = \angle EAB$$

從而 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, 故

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD}, \quad 即 \quad ac = x \cdot BE \quad (12)$$

(11)+(12) 得

$$ac+bd = x\cdot BE+x\cdot ED = x\cdot(BE+ED)$$

因爲 $DE + ED \geq BD = y$, 故

$$xy \leq ac + bd. \qquad (13)$$

在上述演繹過程中, 我們也發現: (13) 式中的等號成立之充要條件是 E 落在對角線 BD 上, 即 A, B, C, D 四點按序共圓。

對於凹四邊形的情形, (13) 式也成立。如下圖 12, 將 AB, BC 對 AC 作鏡射, 得到凸四邊形 $AB'CD$, 令 $B'D = y'$, 則由上述證明知

$$xy' \leq ac + bd$$

因爲 $y \leq y'$, 所以

$$xy \leq ac + bd.$$

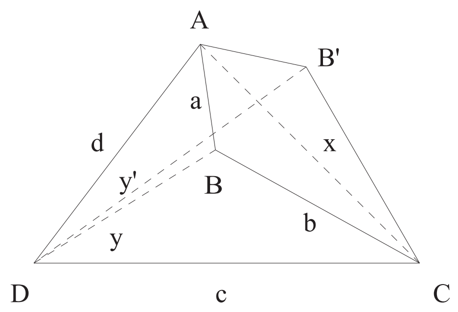


圖 12

進一步, 我們觀察幾種特異與退化的情形 (詳情請參見 [2]):

(i) 當四邊形 $ABCD$ 凹扭成**X**形時 (圖 13), (13) 式也成立,

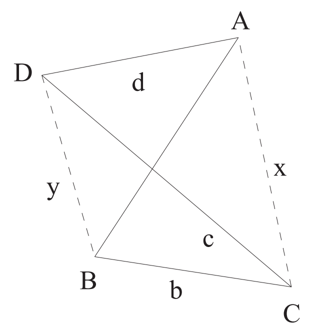


圖 13

(ii) 當四邊形 $ABCD$ 退化成三角形時, 不論是有兩點重合或其中一點落在一個邊上 (圖 14), (13) 式仍然成立。

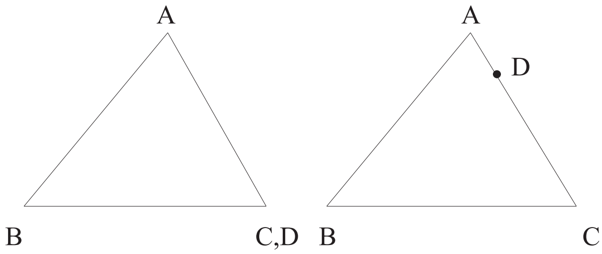


圖 14

(iii) 當四邊形$ABCD$ 退化成在一直線上時, (13) 式成立, 並且當四點在直線上按 A, B, C, D 之順序排列時, (13) 式變成等式: 即 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$。(Euler 定理)。

總結上述之討論, 我們得到

定理3: (*推廣的 Ptolemy 定理, 弱型*) 對於平面上任意四點 A, B, C, D, 下式恆成立:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

並且等號成立的充要條件是 A, B, C, D 四點按序共圓或按序共線。

註. 直線與圓具有同等地位, 直線是具有無窮大半徑之圓。

從直角三角形的畢氏定理: $c^2 = a^2 + b^2$, 到任意三角形的 $c^2 \leq a^2 + b^2$ (當 $\angle C \leq 90^\circ$) 或 $c^2 \geq a^2 + b^2$ (當 $\angle C \geq 90^\circ$), 有精確的餘弦定理: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$。同理, 從圓內接四邊形的 Ptolemy 定理: $xy = ac + bd$, 到任意四邊形的 $xy \leq ac + bd$, 應該也有相應的精確等式吧?

回到圖 10 之一般凸四邊形。 由於$\triangle ADE \sim \triangle ACB$ 且 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, 故

$$\begin{aligned} \angle AED &= \angle B \text{ 且 } \angle AEB = \angle D \\ \angle BED &= 2\pi - (\angle AEB + \angle AED) \\ &= 2\pi - (\angle B + \angle D) \end{aligned}$$

由餘弦定理知

$$\begin{aligned} y^2 &= ED^2 + BE^2 - 2ED \cdot BE\cos(\angle BED) \\ y^2 &= ED^2 + BE^2 - 2ED \cdot BE\cos(B + D) \end{aligned}$$

兩邊同乘以 x^2 得

$$\begin{aligned} x^2y^2 &= (x \cdot ED)^2 + (x \cdot BE)^2 \\ &\quad -2(x \cdot ED)(x \cdot BE)\cos(B + D) \end{aligned}$$

再由 (11) 及 (12) 式得

$$x^2y^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(B + D) \tag{14}$$

因為 $A + B + C + D = 360^\circ$, 故也有

$$x^2y^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A + C) \tag{15}$$

我們注意到兩個特例: (i) 當 $B + D = 180^\circ$ 時, 亦即 A, B, C, D 四點共圓時, (14) 或 (15) 式化約成 Ptolemy 定理: $xy = ac + bd$。因此 (14) 或 (15) 式均可視為 Ptolemy 定理的推廣。(ii) 當 $B + D = 90^\circ$ 時, (14) 或 (15) 式化約成

$$x^2y^2 = a^2c^2 + b^2d^2 \tag{16}$$

另外, (14) 式對於凹四邊形也成立, 其證明只要參考下面圖 15, 而過程完全跟上述凸四邊形的論證一樣。

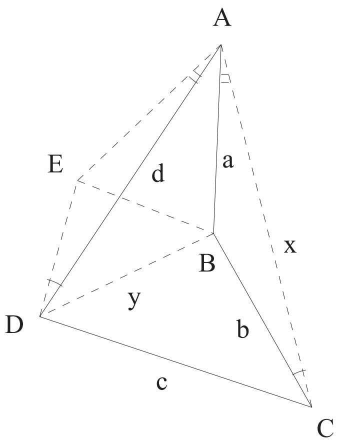


圖 15

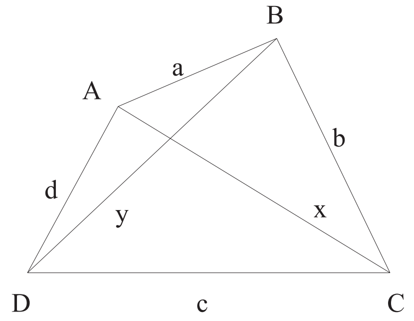
定理4: (推廣的 Ptolemy 定理, 強型)

對於任意的四邊形, 如圖 10 或圖 11, 恆有

$$x^2y^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(B + D).$$

對於任意的四邊形, 顯然由 (14) 式可得 (13) 式, 亦即由定理4可推出定理3。

最後我們追尋任意四邊形的面積公式, 這個問題較微妙而麻煩, 不過還是有跡可尋的。我們參考下面的圖 16及圖17



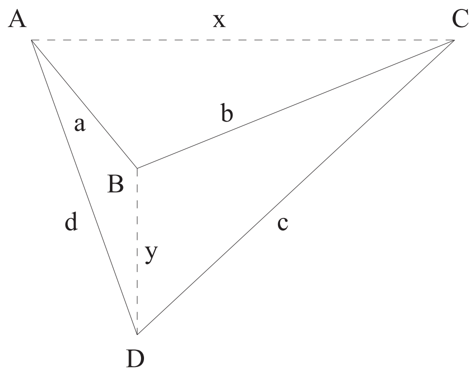
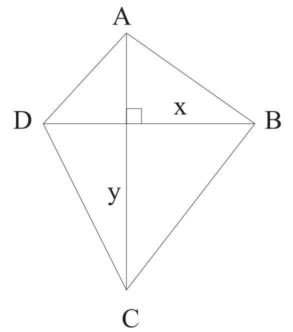


圖 16

圖 17

四邊形有四個邊 a, b, c, d, 四個角 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, 以及兩條對角線 x, y, 總共有 10 個要素, 它們並非完全獨立, 例如我們有強型的推廣的 Ptolemy 定理以及四個角之和為 360°, 這兩者都是對於 10 個要素的限制條件。

四邊不足以決定四邊形的形狀, 這是整個問題的麻煩所在。因爲我們要追尋的不是四邊形的全等問題, 而是面積問題 (前者嚴苛, 後者較寬鬆: 兩四邊形全等則面積相等, 反之不然), 所以從兩條對角線切入較簡潔。我們分成三個步驟來思考。先討論凸四邊形的情形。



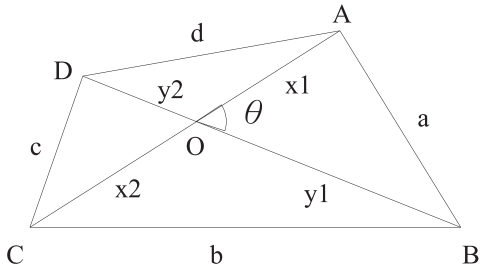


圖18

圖19

(I) 已知四邊形的兩條對角線 x, y, 並且它們互相垂直, 參見圖 18。顯然四邊形的面積爲

$$S = \frac{1}{2}xy \tag{17}$$

(II) 已知對角線 x, y 及它們的夾角 θ, 參見圖 19。令四邊形的對角線 $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, 於是四邊形的面積爲

$$\begin{aligned} S &= \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \triangle DOA \\ &= \frac{1}{2}x_1y_1\sin\theta + \frac{1}{2}x_1y_2\sin(\pi-\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2}x_2y_2\sin\theta + \frac{1}{2}x_2y_1\sin(\pi-\theta) \\ S &= \frac{1}{2}xy\sin\theta \end{aligned} \tag{18}$$

當 $\theta = 90^\circ$ 時, (18) 式化約成 (17) 式。

(III) 更進一步, 又知道四邊, 亦即已知 a, b, c, d, x, y。此時四邊形唯一決定了。如何求面積呢? (18) 式仍然成立, 但是如何將 $\sin\theta$ 消解成 a, b, c, d 呢? 這使我們想到了餘弦定理。由 (18) 式得

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4x^2y^2\sin^2\theta = 4x^2y^2(1-cos^2\theta) \\ &= 4x^2y^2 - (2xy\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

又因爲 (參見圖 19)

$$\begin{aligned} 2xy\cos\theta &= 2(x_1+x_2)(y_1+y_2)\cos\theta \\ &= 2x_1y_1\cos\theta + 2x_1y_2\cos\theta \\ &\quad +2x_2y_2\cos\theta + 2x_2y_1\cos\theta \\ &= 2x_1y_1\cos\theta - 2x_1y_2\cos(\pi-\theta) \\ &\quad +2x_2y_2\cos\theta - 2x_2y_1\cos(\pi-\theta) \\ &= (x_1^2+y_1^2-a^2) - (x_1^2+y_2^2-b^2) \\ &\quad +(x_2^2+y_2^2-c^2) - (x_2^2+y_1^2-d^2) \\ &= -a^2+b^2-c^2+d^2 \end{aligned}$$

所以 $16S^2 = 4x^2y^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2 \quad (19)$

我們也可將 (19) 式, 透過配方, 改寫爲

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (2ac+2bd)^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2 \\ &\quad -4(ac+bd)^2 + 4x^2y^2 \\ &= (a+b+c-d)(b+c+d-a) \\ &\quad (c+d+a-b)(d+a+b-c) \\ &\quad -4[(ac+bd)^2 - x^2y^2] \\ S^2 &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \\ &\quad -\frac{1}{4}[(ac+bd)^2 - x^2y^2] \end{aligned} \tag{20}$$

由此立即看出:

$$
\begin{aligned}
& A, B, C, D \text{四點按序共圓} \\
\Longleftrightarrow \quad & xy = ac + bd \qquad (\text{Ptolemy 定理}) \\
\Longleftrightarrow \quad & S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \\
& \quad (\text{Brahmagupta 公式})
\end{aligned}
$$

值得特別注意的是, 在上述對於凸四邊形的三步驟論證中, (17)、(18)、(19)、(20) 四個公式對於凹四邊形仍然成立。這只要參考下圖 20 並且仿上述論證即可得證。

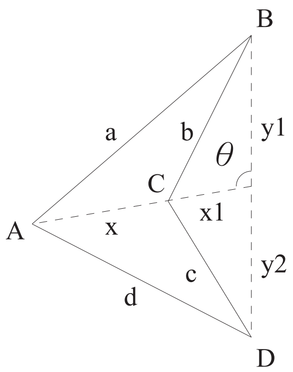


圖 20

接著, 透過強型的推廣的 Ptolemy 定理, (19) 式可以進一步改寫成如下:

$$
\begin{aligned}
16S^2 &= 4(a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(B+D)) \\
&\quad -(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \\
&= (2ac + 2bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \\
&\quad -8abcd(\cos(B+D) + 1) \\
&= (a+b+c-d)(b+c+d-a) \\
&\quad (c+d+a-b)(d+a+b-c) \\
&\quad -16abcd\cos^2(\frac{B+D}{2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^2 &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \\
&\quad -abcd\cos^2(\frac{B+D}{2}) \qquad (21)
\end{aligned}
$$

顯然也有

$$
\begin{aligned}
S^2 &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \\
&\quad -abcd\cos^2(\frac{A+C}{2}) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

總結上述討論, 我們得到

定理 5:(Bretschneider 公式,1842年)

對於任意四邊形 (不論凹凸), 其面積S爲

$$
\begin{aligned}
16S^2 &= 4x^2y^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \\
\text{或} \quad S^2 &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \\
&\quad -\frac{1}{4}[(ac+bd)^2 - x^2y^2] \\
\text{或} \quad S^2 &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \\
&\quad -abcd\cos^2(\frac{B+D}{2})
\end{aligned}
$$

推論 1. 當四邊形爲圓外切四邊形時, 則

$$S = \sqrt{abcd}\sin(\frac{B+D}{2}).$$

推論 2. 當四邊形既是圓內接也是圓外切四邊形時, 則

$$S = \sqrt{abcd}$$

推論 3. 在四邊 a, b, c, d 給定的情形下, 以圓內接四邊形的面積爲最大。

五. 結語

將本文的討論推廣到五邊形的情形就已經很困難而不切實際 (事實上是走不通)。另

一方面, 推廣到三維空間, 這會涉及到面積與體積的計算, 畢氏定理與 Ptolemy 定理也會有進一步的推廣, 這些是向量幾何的美麗論題。

参考資料

1. 蔡聰明: 談 Heron 公式 — 記一段教學經驗, 數學傳播, 第17卷第一期, 1993。
2. 許振榮: 關於 Ptolemy 的定理, 數學傳播, 第7卷第三期, 1983。
3. E. W. Hobson: A treatise on plane and advanced trigonometry, Dover, 1957.
4. Z. A. Melzek: Invitation to geometry, John Wiley and Sons, 1983.
5. E. S. Loomis: The Pythagoream proposition, 1968.

—本文作者任教於國立台灣大學數學系—