

2012年 第13屆 AMC 10A

考試須知

1. 未經監考人員宣佈打開測驗卷之前，不可先行打開試卷作答。
2. 本測驗為選擇題共有 25 題，每一題各有 A、B、C、D、E 五個選項，其中祇有一個選項是正確的答案。
3. 請將正確答案用 **2B** 鉛筆在「答案欄」上適當的圓圈內塗黑，請檢查所圈選的答案是否正確，並將錯誤及模糊不清部分擦拭乾淨。請注意，祇有將答案圈選清楚在答案卡上才得以計分。
4. 計分方式：每一題答對可得 **6** 分，不作答得 **1.5** 分，答錯得 **0** 分。
5. 除了考試所准許使用的尺、圓規、量角器、橡皮擦、方格紙及計算紙外，請勿攜帶任何輔助工具(包含計算器)進入考場，考卷上所有的題目均不需使用計算器便可作答。
6. 試卷內的圖形可能未依比例繪製。
7. 考試之前，監考人員會指示你填寫一些基本資料於答案卡上，待監考人員給予指示後開始作答，你作答時間共 **75** 分鐘。
8. 當你完成作答後，請在答案卡的簽名空格內簽名。
9. **AMC 10** 考生得 **120** 分以上，或者成績名列前 **2.5%** 者，將會受邀參加 **2012 年 3 月 17 日** 星期六所舉行的第 **30** 屆 **American Invitational Mathematics Examination (AIME)** 考試，本會預計於 **2 月 20 日** 寄發 **AIME** 考試邀請通知書。

12
×1.5

6
12
18

第 13 屆 AMC 10A 2011

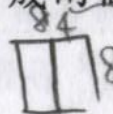
1. 小華每 20^3 秒可以將一個蛋糕鋪滿糖霜，小明每 30^2 秒可以將一個蛋糕鋪滿糖霜。若他們一起工作，則 5 分鐘他們共可將多少個蛋糕鋪滿糖霜？

$15 + 10$

D

- (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

2. 將一個邊長為 8 的正方形平分成兩個全等的長方形，則長方形的寬與長為多少？



E

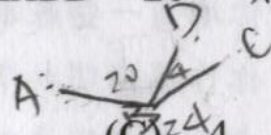
- (A) 2 與 4 (B) 2 與 6 (C) 2 與 8 (D) 4 與 4 (E) 4 與 8

3. 一隻蟲沿著數線爬行，它先從 -2 開始爬至 -6 ，再調頭反方向爬至 5 ，那麼此蟲總共爬了多少個單位長？

E

- (A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 14 (E) 15

4. 已知 $\angle ABC = 24^\circ$ ， $\angle ABD = 20^\circ$ ，則 $\angle CBD$ 最小可能的度數為多少？



C

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 12

5. 去年 100 隻成熟的貓被送至某動物收容所，這些貓中有一半是母貓，又其中半數的母貓各帶著一窩小貓進收容所，每窩平均有 4 隻小貓。試問此收容所去年總共收容了多少隻貓？

$15 + 25 + 100$

B

- (A) 150 (B) 200 (C) 250 (D) 300 (E) 400

6. 兩個正數的乘積為 9，若其中一數的倒數是另一數倒數的 4 倍，則這兩數的和為多少？

$\frac{9}{x}$

$3 \times \frac{2}{3}$

D

$\frac{1}{x} = 4 \times \frac{1}{y}$

$\frac{9}{4} \times \frac{3}{2}$

- (A) $\frac{10}{3}$ (B) $\frac{20}{3}$ (C) 7 (D) $\frac{15}{2}$ (E) 8

7. 在一袋彈珠中，原有 $\frac{3}{5}$ 的彈珠是藍色，其餘的是紅色。若藍色的彈珠維持不變，而將紅色的彈珠增加一倍後，則袋中紅色彈珠占全部彈珠的幾分之幾？

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{4}{5}$

8. 有三個相異正整數，已知它們兩兩之和分別為 12、17 與 19。若將原來的三個數由小排到大，則中間的數為何？

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

9. 有兩個各有六個面的公正骰子，其中一個骰子的六個面上標記了 2, 4, 6 各有兩個，另一個骰子的六個面上標記了 1, 3, 5 各兩個。試問投擲這兩個骰子一次，它們朝上的兩個面其數字和為 7 的機率是多少？

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

10. 小馬將一個圓分割成 12 個扇形，每個扇形的圓心角以度數計都是整數，且它們形成一個等差數列。若以度數計，則最小可能的圓心角的度數是多少？

- (A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12



$$12x + 11d = 360$$

$$\begin{array}{r} 12x + 11d = 360 \\ -12x + 3d = -360 \\ \hline 14d = 720 \\ d = 51.4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ -72 \\ \hline 288 \\ \frac{288}{8} = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ -84 \\ \hline 276 \\ \frac{276}{12} = 23 \end{array}$$

11. 兩個外切的圓之圓心分別為 A 及 B ，它們的半徑分別為 5 及 3。

若此二圓的一外公切線與直線 AB 交於點 C ，試問 \overline{BC} 之長為何？

- (A) 4 (B) 4.8 (C) 10.2 (D) 12 (E) 14.4

Handwritten notes for Q11: $x=3$, $x+8=5$, $2x=24$, $3x+24=5x$

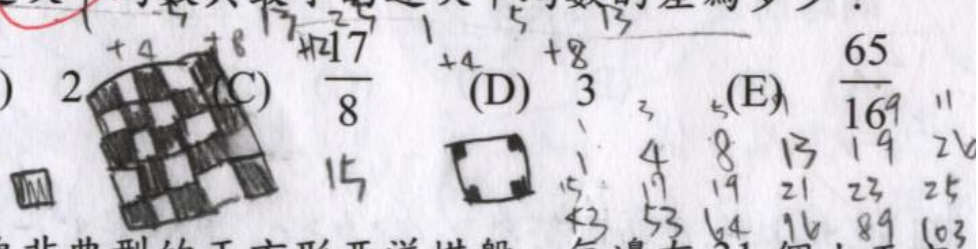
12. 西元某年是閏年的充要條件為此年的年數可以被 400 整除(例如西元 2000 年)，或它可被 4 整除但不能被 100 整除(例如西元 2012 年)。小說家 Charles Dickens 200 歲的冥誕紀念日為西元 2012 年 2 月 7 日，此日為星期二。試問 Dickens 出生之日是星期幾？

- (A) 星期五 (B) 星期六 (C) 星期日
(D) 星期一 (E) 星期二

Handwritten notes for Q12: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{23}{8}$, $\frac{63}{16}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{1}{4} + \frac{16}{4}$, $\frac{23}{8} + \frac{40}{8}$

13. 將 1, 2, 3, 4, 5 依某種順序排列，對於這種排列的逐次平均數的計算方式如下：先找出最前面兩數的平均數；再求此平均數與第三數的平均數；再求第二次得到的平均數與第四數的平均數；最後再求第三次得到的平均數與第五數的平均數；如此最終所得到的平均數稱為此排列的逐次平均數。試問 1, 2, 3, 4, 5 所有可能的排列中，最大的逐次平均數與最小的逐次平均數的差為多少？

- (A) $\frac{31}{16}$ (B) 2 (C) $\frac{17}{8}$ (D) 3 (E) $\frac{65}{16}$

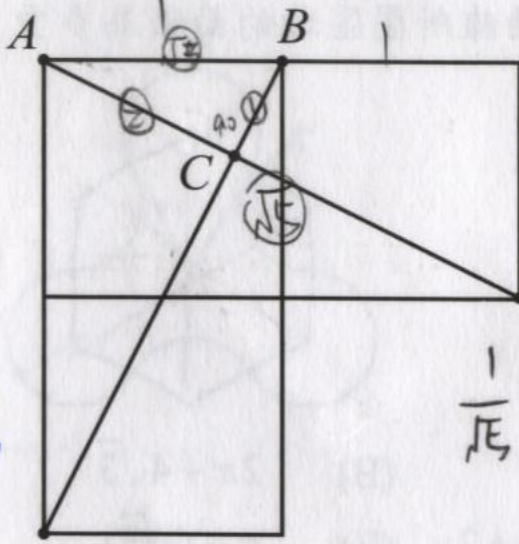


14. 小貝製作了一塊非典型的正方形西洋棋盤，每邊有 31 個小正方形。若此棋盤的四個角落都是黑色的小正方形，且各行各列都是黑、紅相間的小正方形，則此棋盤上總共有多個黑色的小正方形？

- (A) 480 (B) 481 (C) 482 (D) 483 (E) 484

Handwritten notes for Q14: $1+2+3+4+\dots+15$, $15 \times 15 = 225$, $480 + 225 = 705$

15. 如圖所示，此圖是由三個單位正方形及兩條連接兩組頂點的線段所形成的。試問圖中 $\triangle ABC$ 的面積為多少？



- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

16. 三名賽跑選手同時、同向、從同一起跑點開始在一個 500 公尺長的圓形跑道上賽跑，三位選手的速率分別為 4.4 公尺/秒、4.8 公尺/秒及 5 公尺/秒，且他們都維持各自固定的速率跑，則從開始到他們下一次都碰在一起共花了幾秒鐘？

- (A) 1000 (B) 1250 (C) 2500 (D) 5000 (E) 10000

17. 若 a 及 b 為互質的整數， $a > b > 0$ ，且滿足 $\frac{a^3 - b^3}{(a - b)^3} = \frac{73}{3}$ ，則

$a - b = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Handwritten calculations for problem 17:

$$\frac{a^3 - b^3}{(a - b)^3} = \frac{73}{3}$$

$$\frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)^3} = \frac{73}{3}$$

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{(a - b)^2} = \frac{73}{3}$$

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{73}{3}$$

$$3(a^2 + ab + b^2) = 73(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$3a^2 + 3ab + 3b^2 = 73a^2 - 146ab + 73b^2$$

$$70a^2 - 149ab + 70b^2 = 0$$

$$70\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 149\left(\frac{a}{b}\right) + 70 = 0$$

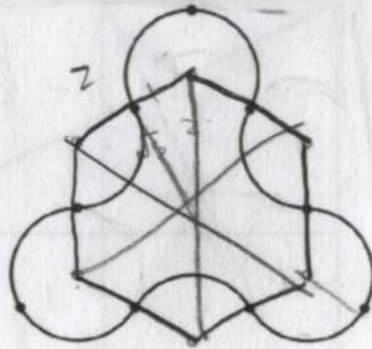
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{149}{70}\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{139}{70}\right) = 0$$

Since $a > b > 0$, $\frac{a}{b} = \frac{139}{70}$.
 $a - b = \frac{139}{70}b - b = \frac{69}{70}b$.
 Since a and b are coprime, $b = 70$ and $a = 139$.
 $a - b = 139 - 70 = 69$.

18. 圖中的曲線是由 9 個全等的圓弧所組成的，各段弧長都是 $\frac{2\pi}{3}$ ，

這些弧對應的圓心(以 \circ 表示)可形成一個邊長是 2 的正六邊形的頂點。試問此曲線所圍區域的面積為多少？



Handwritten calculations for the area of the region:

$$2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$2\pi + 12\sqrt{3}$$

- (A) $2\pi + 6$ (B) $2\pi + 4\sqrt{3}$ (C) $3\pi + 4$
 (D) $2\pi + 3\sqrt{3} + 2$ (E) $\pi + 6\sqrt{3}$

19. 寶拉與她的兩位朋友各自以固定的速率塗油漆，但每個人塗油漆的速率都不同。她們都是在早上 8:00AM 開工，每天她們三人也花相同的時間吃午餐。星期一她們三人在下午 4:00PM 收工，漆了整棟房子的 50%。星期二，寶拉不在，她的兩位朋友在下午 2:12PM 收工，又漆了整棟房子的 24%。星期三只有寶拉一個人工作，在下午 7:12PM 才將整棟房子完全漆好。試問她們每天花多少分鐘吃午餐？

- (A) 30 (B) 36 (C) 42 (D) 48 (E) 60

20. 將一個邊長為 3 的大正方形畫分成 9 個邊長為 1 的小正方形格子，並隨意將每一個格子塗成白色或黑色。以大正方形中心為旋轉中心順時針轉 90° 後，除將原來位置是黑色但旋轉後變成白色的格子再塗成黑色外，其它的格子顏色維持不變，此時大正方形



的所有格子都是黑色的機率是多少？

- (A) $\frac{49}{512}$ (B) $\frac{7}{64}$ (C) $\frac{121}{1024}$ (D) $\frac{81}{512}$ (E) $\frac{9}{32}$

21. 給定四點 $A(0,0,0)$ 、 $B(1,0,0)$ 、 $C(0,2,0)$ 及 $D(0,0,3)$ ，若點 E 、 F 、 G 及 H 分別為 \overline{BD} 、 \overline{AB} 、 \overline{AC} 及 \overline{DC} 的中點，則四邊形 $EFGH$ 的面積為多少？

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

22. 已知正整數中前 m 個正奇數的和比前 n 個正偶數的和大 212。試問所有可能的 n 之和為多少？

- (A) 255 (B) 256 (C) 257 (D) 258 (E) 259

23. 阿丹、小班、小蔣、阿迪、大華與小峰 這群人都有網路帳號，他們之中有一些人(但不是全部)彼此是網路上的朋友，且他們除了這群人以外都沒有其他的網路朋友。如果每一個人都有一樣多個網路朋友，則總共有多少不同的組成方式？

- (A) 60 (B) 170 (C) 290 (D) 320 (E) 660

24. 已知 a, b, c 為正整數， $a \geq b \geq c$ ，且滿足

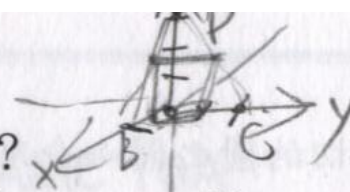
$$a^2 - b^2 - c^2 + ab = 2011$$

$$a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3ab - 2ac - 2bc = -1997$$

則 $a = ?$

- (A) 249 (B) 250 (C) 251 (D) 252 (E) 253

$$za^2 + zb^2 + zb^2 - zab - zac - zbc = 14$$



$$C_0^6 + C_1^6 + C_2^6 + C_3^6 + C_4^6 + C_5^6$$

$$a^2 - b^2 - (a-3)^2 + ab = 2011$$

分別將 $b = a-1$ or $b = a-2$

$$\Rightarrow a = 2$$

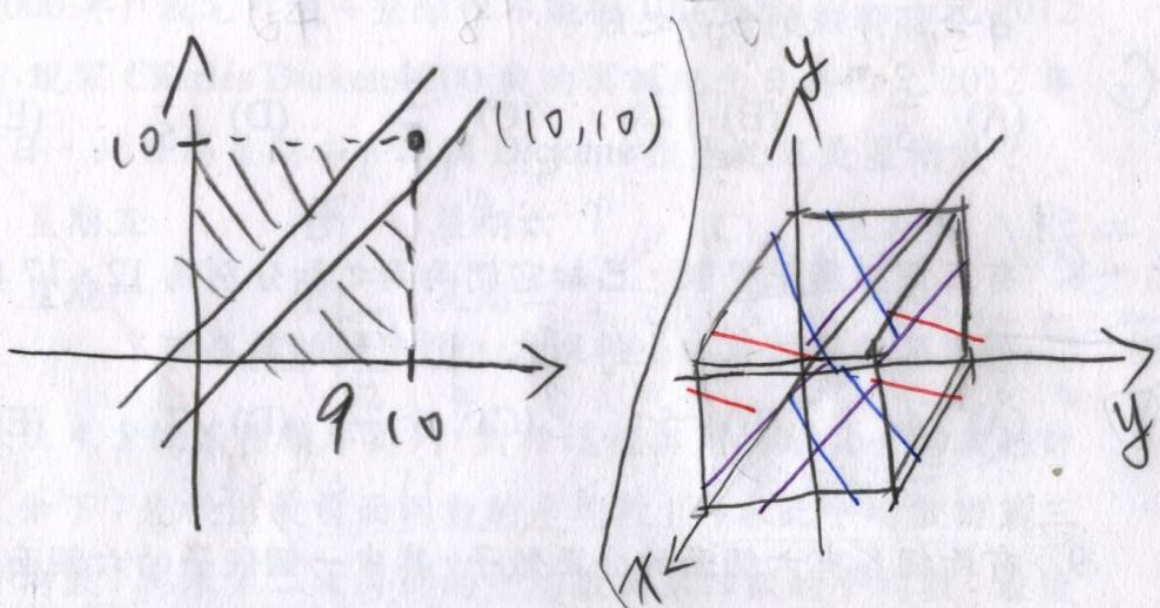
Mathpro joy 091

AMC10A

25. 從區間 $[0, n]$ 中隨意取出三個實數 x, y 及 z , 其中 n 為某正整數。若 x, y, z 中沒有兩數之差的絕對值小於 1 的機率大於

$\frac{1}{2}$, 則 n 的最小值為何?

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11



$$|x - y| > 1 \quad \text{or} \quad |y - x| > 1$$

$$y < x - 1 \quad \text{or} \quad y > x + 1$$

$$|x - y| > 1$$

$$= \frac{9^2}{10^2} = \frac{81}{100}$$

$$|x - y| > 1 \quad \text{and} \quad |x - z| > 1$$

$$\text{and} \quad |y - z| > 1$$

$$\frac{(n-2)^3}{n^3} > \frac{1}{2}$$